Instituto Tecnológico Autónomo de México

Geometría de los Espacios de Banach y Teoría del Punto Fijo

Tesis

que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Isaac Meza López

Ciudad de México. 2018

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Geometría de los Espacios de Banach y Teoría del Punto Fijo

Tesis

que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Isaac Meza López

Asesor: Dr. César Luis García García

Ciudad de México. 2018

Lu :

La palabra trivial es la más peligrosa de las matemáticas.

clips...clips...clips

Agradecimientos

Me di cuenta que ésta es la parte más difícil de escribir. En un principio pensé que sería más extenso aquí que en varias de las demostraciones que presento. Me gustaría enfatizar que a tods ls que aquí aparecen podría escribirles todo un libro. Me encantaría ser exhaustivo y mencionar a *casi todas* las personas que se han cruzado en mi camino, sin lugar a dudas les agradezco.

Posili, supongo que quiero empezar por agradecerte a ti, seré muy breve porque ya sabes todo lo que pienso: Siempre estaré muy agradecido. Te quiero mucho... *dos azules...*

A Alcalde Alcira. A mi mamá y mi papá. Me han enseñado mucho y me han regalado todo en esta vida. Estoy convencido que me aman muchísimo. Aprovecho para disculparme por todos mis errores, se que son muchos. Ls amo.

A la Dra. Berta Gamboa, quien me introdujo a la Teoría del Punto Fijo en el segundo verano más lindo que he vivido.

A mis profesores César Luis García, Carlos Bosch y Guillermo Grabinsky, de quienes aprendí muchísimo y me enseñaron sobre uno de los amores de mi vida: el análisis matemático. Además de que este trabajo no habría sido posible sin ellos.

A Enrique Seira y Joyce Sadka, quienes me adoptaron como un "hijo académico", me enseñaron a trabajar en investigación y siempre me motivaron. Son una gran fuente de admiración e inspiración para mí.

A tods mis profesors del ITAM, en especial al profesor Zeferino Parada, quien me convenció que la optimización numérica y la matemática computacional deben de ser una parte de mi vida.

A Estefanía, quien me acompañó en todo el momento de escribir esta tesis, me escuchó siempre, me brindó un apoyo que jamás olvidaré y por el gran cariño que siempre le tendré.

A mis hermans del club de análisis: Joaquín, Loko y Juan Pablo, de las personas más inteligentes con quien me he topado. Siempre me motivaron a seguir estudiando y aprendiendo.

A los del club de estadística y a los ganadores del día π. Fueron excelentes amigs en la carrera: Wills, Lobato, Omar, Pablito, Loredo, Pato, Laureano, Lalo, Lucy, Chisko, Imanol, Coras e Ilan.

A ls del CECEC, quienes hicieron los días en ST súper divertidos y los jueves familiares: Bernarduki, Dieguito, Mario, Chabert, Dan, Jime, Saúl, Steph y Moni.

A tods ls compas y a Cano, en especial a mi amiguita Pau. U+1F423

A Juan Manuel, Luis, Víctor, Saúl, Ledesma, Fer, Leo y la OMM. Como siempre he dicho, si no hubiese tenido ese capítulo en mi vida quizás no habría estudiado matemáticas.

A Davicho, quien ha sido mi mejor amigo y compañero en muchas aventuras.

A los súper amigos y los súper agentes.

A Andrés porque a pesar de que pasan largos ratos que no nos vemos, sigue siendo un amigo de toda la vida. Asímismo a Bubu, Evita, Andrea, Tania y Maggy.

A ls matemátics y la musica como inspiración, aunque muchas veces fue nostálgico sentir ciertas notas, pero siempre muy hermoso.

A todos los que creyeron en mi. A toda la gente que cruzó camino conmigo y constantemente me dieron motivos para seguir creciendo, aunque sus cumplidos *siempre* fueron muy generosos.

Me conmueve mucho haber escrito esto, sobre todo porque cuando empecé a trabajar en esta tesis vivía uno de los momentos más tristes y difíciles de mi vida. A tods aquells que me vieron llorar, me dieron muchos ánimos y siempre estuvieron al pendiente. Si no hubiera topado con pared, quizás este trabajo se hubiera prolongado, o quizás incluso no estaría hablando de TPF. Disfrute mucho al estudiar, sumergirme en las demostraciones y perderme en el análisis. A tods ls quiero mucho.

Prefacio

Los espacios de Banach nos proveen de un marco para el análisis lineal y no-lineal, la teoría de operadores, el análisis abstracto y armónico, la teoría de probabilidad, la optimización y las diversas ramas de las matemáticas. Por su naturaleza, podemos identificar en los espacios de Banach dos componentes: su estructura lineal y su estructura topológica. Es la interacción entre estas dos de donde emergerán diversas propiedades geométricas.

En una amplia gama de problemas matemáticos la existencia de una solución es equivalente a la existencia de un punto fijo para un mapeo adecuado. Encontrar puntos fijos es por lo tanto de suma importancia en varias áreas de las matemáticas y otras ciencias. La presencia o ausencia de un punto fijo es una propiedad intrínseca de un mapeo. Sin embargo, muchas condiciones necesarias o suficientes para la existencia de tales puntos implican una mezcla de propiedades algebraicas, o topológicas del mapeo o su dominio. Los resultados clásicos de punto fijo proporcionan condiciones bajo las cuales los mapeos tienen puntos fijos. Aquí seremos más ambiciosos, pues nos preguntaremos por espacios en donde toda una clase de operadores, a decir las funciones 1-Lipschitz con dominio cerrado, convexo y acotado (o además w-compacto), tengan siempre un punto fijo - a esto nos referiremos como espacios con la propiedad del punto fijo y que abreviaremos como (FPP).

En este trabajo nos enfocamos en el estudio de las propiedades geométricas, su relación entre ellas, la forma en la que gobiernan estos espacios y su conexión con la propiedad del punto fijo. Pese a que pretendo que la tesis sea auto-contenida respecto a los temas que en este trabajo se estudian, es necesario tener un conocimiento mínimo en análisis funcional, por ejemplo los primeros tres capítulos de [FHH+11].

La principal contribución de esta tesis es en dar una introducción y revisión de la Teoría del Punto Fijo. En los primeros capítulos exploramos algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach y su relación con FPP. En posteriores capítulos revisamos la relación entre reflexividad y FPP y estudiamos aquellos espacios que pueden dotarse de una norma equivalente de forma que el renormamiento propuesto cumple con dicha propiedad (incluso cuando la norma original no satisface FPP). Finalizamos con dos Teoremas (5.11,5.13), generalizaciones **(originales)** sobre los espacios que admiten renormamientos que cumple con FPP y *además* cuantificamos el tamaño de esos posibles renormamientos.

El Capítulo 1 trata sobre las propiedades geométricas de los espacios de Banach, las relaciones entre sí y la dualidad entre la redondez y la suavidad del espacio.

El Capítulo 2 nos introduce de forma elemental a la Teoría del Punto Fijo (TPF). Es en éste capítulo donde establecemos la relación de la geometría del espacio revisada en el Capítulo 1 con la propiedad del punto fijo.

Las limitaciones puramente geométricas en el desarrollo de la TPF han empujado a buscar métodos más imaginativos. Estos métodos se basan en construcciones no-estándar. El Capítulo 3 introduce dichos métodos y estudia las propiedades más importantes de la construcción no-estándar: el ultraproducto de Banach. Basándonos en estos métodos, establecemos la propiedad del punto fijo para una clase de espacios que satisfacen cierta relación geométrica, la cual revisamos.

Una de las líneas centrales de investigación dentro de la TPF es sobre la caracterización de FPP. En otras palabras, saber cuáles son todos los espacios que cumplen con dicha propiedad. Actualmente no conocemos siquiera si espacios reflexivos satisfacen la propiedad del punto fijo. Otra pregunta directamente relacionada con la anterior es conocer si un espacio puede renormarse de forma equivalente para satisfacer con FPP cuando la norma original no lo hace (en vista de que no sólo la estructura lineal, sino la forma de su bola unitaria juegan un papel importante para establecer tal propiedad). Este es el marco con el que trabajamos en el Capítulo 4: es encontrar a qué espacios se les puede dotar de una norma equivalente con propiedades geométricas deseables, y para cuales otros espacios dichos renormamientos son imposibles de establecer.

Finalmente, nos preguntamos por la genericidad de la propiedad, es decir qué tantos renormamientos (equivalentes) existen que siguen cumpliendo con propiedades geométricas deseables o que implican la propiedad del punto fijo. En el Capítulo 5 definimos de forma rigurosa ésta idea de genericidad. Damos la demostración del resultado clásico de [FZZ82] y lo extendemos en dos direcciones: (i) incluyendo otras nociones geométricas y (ii) considerando un concepto más general que el de conjunto residual. Asimismo demostramos que salvo ciertas excepciones, los renormamientos de un espacio reflexivo cumplen con FPP (estableciendo al menos parcialmente la pregunta evasiva sobre la relación entre reflexividad y FPP), de hecho demostramos una proposición más fuerte, generalizando teoremas de [DBP10] y [DBP08] que hace uso de métodos no estándar del Capítulo 3. Estos serán los Teoremas (5.11,5.13).

Glosario

X - Denota a un espacio de Banach, a menos que se diga lo contario.

X^* - Denota el espacio dual topológico de un espacio de Banach X.

$B_X := \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ - La bola unitaria cerrada del espacio X.

$S_X := \{x \in X \mid ||x|| = 1\}$ - La esfera unitaria del espacio X.

$||\cdot||_X$ - La norma del espacio X.

e_n - Elementos básicos canónicos de un espacio.

$\overline{A} := \cap\{C \mid A \subseteq C \ , C$ es cerrado $\}$ - La cerradura del conjunto A.

$\operatorname{span}\{A\} := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset A, \ \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}\}$ - El espacio vectorial generado por el conjunto A.

$\overline{\operatorname{span}\{A\}}$ - La cerradura del espacio vectorial generado por el conjunto A.

$\ker T := \{x \mid Tx = 0\}$ - Kernel del operador T.

$\operatorname{sep}\{A\} := \operatorname{ínf}_{x \neq y \mid x,y \in A} ||x - y||$ - Separación de un conjunto A.

$\operatorname{conv}(A) := \cap\{C \mid A \subseteq C \ , C$ es convexo $\}$ - Envolvente convexa de un conjunto A.

$d(x, A) := \operatorname{ínf}_{y \in A} ||x - y||$ - Distancia de un punto x a un conjunto A.

$\operatorname{diam}\{A\} := \sup_{x,y \in A} ||x - y||$ - Diámetro de un conjunto A.

$w-$ - Hace referencia a la topología débil, e.g. w-compacto es un conjunto débil compacto.

w^*- - Hace referencia a la topología débil estrella.

$\operatorname{lím}_{\mathcal{U}}$ - Ultralímite : límite con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$.

$(X_i)_{\mathcal{U}} \, , \widetilde{X_i}$ - Ultraproducto de Banach de los espacios X_i.

$\operatorname{dens}(X)$ - Carácter de densidad de X: $\operatorname{mín}\{|D| \mid D \subset_{\text{denso}} X\}$.

Índice general

Capítulo 1

Geometría de los Espacios de Banach

En este capítulo estudiaremos la geometría de la bola unitaria. Como veremos no sólo las propiedades de los operadores son relevantes sino que la geometría de la bola unitaria juega un papel muy importante para establecer la existencia de puntos fijos. Por esta razón se estudian distintas propiedades geométricas que en términos muy generales miden qué tan 'redonda' o 'suave' es la bola del espacio. Aunque la completez del espacio no es relevante en muchas de las nociones que se estudian aquí, siempre trabajaremos con espacios de Banach, pues para FPP si lo es. En lo subsecuente X denotará a un espacio de Banach, a menos que se diga explícitamente que es de otro modo. Asimismo, si no se hace explícita la norma de los espacios de Banach, supondremos que es la norma usual.

1.1. Convexidad

En esta sección estudiaremos la geometría de la bola unitaria, la cual dictará las propiedades del espacio en cuestión. Aquí reunimos diversas propiedades geométricas y estudiamos la conexión entre ellas. Para ello establecemos caracterizaciones de dichas propiedades y mostramos diversos ejemplos para ilustrar dichas relaciones.

La primera de las propiedades geométricas tiene que ver con la redondez de la bola unitaria. El espacio tendrá un mejor comportamiento, en el sentido que gozará de mayores propiedades geométricas, mientras más redonda sea la bola unitaria.

Definición 1.1. *Un espacio X es estrictamente convexo (SC) si se cumple que para todo $x, y \in B_X$ con $||x-y|| > 0$, entonces $\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1$.*

La propiedad anterior nos dice que la esfera no contiene segmentos de recta. Es fácil notar que si el espacio es (SC), entonces para un par de vectores linealmente independientes se tiene que

$$||x+y|| < ||x|| + ||y||$$

Un refinamiento de la condición anterior es imponer que las desigualdades se cumplan de manera uniforme. La siguiente es una definición introducida en [Cla36] para el estudio de los espacios $\mathbb{L}_p$.

Definición 1.2. *Un espacio X es uniformemente convexo (UC) si para toda $\epsilon \in (0,2]$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in B_X$ con $||x-y|| > \epsilon$, entonces $\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1-\delta$.*

Es claro que los espacios UC son SC. Los siguientes son ejemplos de espacios que cumplen con la propiedad UC.

Ejemplo 1.1.

(I) Los espacios de Hilbert son UC. La demostración de este hecho es consecuencia directa de la ley del paralelogramo.

(II) [Han56]: Los espacios $\mathbb{L}_p$ con $1 < p < \infty$ son UC[1].

Con el fin de estudiar el 'grado de redondez' introducimos el *módulo de convexidad* para el espacio X como: $\delta_X : [0,2] \mapsto [0,1]$ definido por

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left|\left| \frac{x+y}{2} \right|\right| \mid x, y \in S_X \ , \ ||x-y|| \geq \epsilon \right\} \tag{1.1}$$

Notemos que

$$\left|\left| \frac{x+y}{2} \right|\right| \leq 1 - \delta_X(\epsilon)$$

siempre que $x, y \in S_X \ , \ ||x-y|| \geq \epsilon$. Así podemos concluir que X es (UC) si y sólo si $\delta_X(\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon \in (0,2]$

El siguiente resultado establece una propiedad notable de δ_X.

Lema 1.1. *$\delta_X(\epsilon) = \inf \delta_E(\epsilon)$; en donde el ínfimo se toma sobre todos los subespacios E 2-dimensionales de X. A esta propiedad la llamaremos carácter de dimensión 2.*

[1]Se concluye a partir de las siguientes desigualdades probadas en [Han56], que en cierto sentido recuerdan a la ley del paralelogramo, de hecho con $p = 2$ la recuperamos. Así (H1) y (H2) se pueden considerar como generalizaciones de dicha ley en $\mathbb{L}_p$.

Sean $f, g \in \mathbb{L}_p$

$$p \in [1,2] \ : \quad ||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p \geq (||f||_p + ||g||_p)^p + | \, ||f||_p - ||g||_p|^p \tag{H1}$$

$$p \in [2,\infty) \ : \quad ||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p \leq (||f||_p + ||g||_p)^p + | \, ||f||_p - ||g||_p|^p \tag{H2}$$

Antes de comenzar con la demostración, hacemos unas observaciones.

El hecho de que el módulo de convexidad tenga carácter de dimensión 2 significa que la convexidad de los subespacios de dimensión finita 'escalan' a todo el espacio, es decir, la convexidad se puede pensar como una condición geométrica local.

Puesto que $\mathcal{C}[0,1], \mathbb{L}_1, \mathbb{L}_\infty, c, c_0$ contienen copias isométricas de subespacios 2-dimensionales de ℓ_∞ o (ℓ_1) con las normas usuales y el módulo de convexidad es invariante ante isometrías, entonces para todos ellos $\delta_X(\epsilon) = 0$ para todo $\epsilon \in [0,2]$; pues la bola unitaria de los subespacios 2-dimensionales de ℓ_∞ o (ℓ_1) son 'cuadradas'.

Demostración. Sea E un subespacio 2-dimensional de X. Claramente $\delta_X(\epsilon) \leq \inf \delta_E(\epsilon)$. Dada $\mu > 0$, sean $x, y \in S_X$ con $||x - y|| \geq \epsilon$ tal que

$$\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < \delta_X(\epsilon) + \mu$$

Si $E = \operatorname{span}\{x, y\}$, entonces

$$\delta_X(\epsilon) \leq \delta_E(\epsilon) \leq 1 - \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < \delta_X(\epsilon) + \mu$$

y como μ es arbitraria se obtiene el resultado. □

A continuación exponemos una propiedad impresionante de los espacios UC.

Teorema 1.2 (Milman-Pettis)**.** *Los espacios (UC) son reflexivos.*

Demostración. Sea X un espacio que cumple con la propiedad UC. Sea $f \in S_{X^*}$ y $\{x_n\} \subseteq S_X$ tal que $f(x_n) \longrightarrow 1$. Afirmamos que $\{x_n\}$ es Cauchy. En efecto, pues de otro modo existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ y $\epsilon > 0$ con $||x_{n_k} - x_{n_m}|| \geq \epsilon$ para todo $k \neq m$. Por UC existe $\delta > 0$ tal que $\left|\left|\frac{x_{n_k}+x_{n_m}}{2}\right|\right| \leq 1 - \delta$, pero entonces

$$\left|f(\frac{x_{n_k} + x_{n_m}}{2})\right| \leq 1 - \delta$$

lo cual es una contradicción.

Finalmente el límite norma a f y por el Teorema de James[2] concluimos que X es reflexivo. □

Pasamos ahora a considerar algunas generalizaciones de la idea de convexidad. Decimos que un espacio es UC si para cualesquiera dos puntos sobre la esfera unitaria que están ϵ-separados, el punto medio se encuentra 'uniformemente' dentro de la bola. Si además pedimos

[2] Recordemos que el Teorema de James caracteriza a los espacios reflexivos como aquellos en donde las funcionales alcanzan su norma en la bola unitaria.

que para todas las cuerdas con longitud fija de la esfera unitaria que sean paralelas a una dirección fija, su punto medio esté uniformemente dentro de la bola, llegamos a la primera generalización de convexidad. Esta noción es la de UCED, que definimos de forma rigurosa a continuación.

Definición 1.3 (UCED). *Un espacio X es uniformemente convexo en toda dirección (UCED) si para toda dirección $z \in S_X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall\, x, y \in S_X \ , \ x - y = \lambda z \ , \ |\lambda| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1 - \delta$$

Las siguientes caracterizaciones de UCED resultan útiles para probar diversas propiedades de los espacios UCED. Su demostración puede encontrarse en [DJS71].

Teorema 1.3 (Caracterizaciones de (UCED)). *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) X es UCED

(II) Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subseteq X$ sucesiones, entonces

$$\left.\begin{array}{r} x_n \ , \ y_n \in B_X \quad ; \forall\, n \in \mathbb{N} \\[2ex] x_n - y_n \longrightarrow z \\[2ex] \left|\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|\right| \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ z = 0$$

(III) Para ningún $z \neq 0$ existe $\{x_n\} \subseteq X$ tal que

$$2^{p-1}\left(||x_n + z||^p + ||x_n||^p\right) - ||2x_n - z||^p \longrightarrow 0$$

con $2 \leq p < \infty$.

Con ayuda de las equivalencias del Teorema anterior, probamos el siguiente Teorema debido a Zizler.

Teorema 1.4 ([Ziz71]). *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longmapsto Y$ un operador lineal acotado e inyectivo. Si Y es UCED, entonces X admite una norma UCED equivalente.*

Demostración. Demostraremos que la norma

$$||x||_{\text{UCED}} = \left(||x||_X^2 + ||Tx||_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es el renormamiento deseado, es decir que cumple con la propiedad que caracteriza a espacios UCED.

Supongamos que existen $z \neq 0$ y $\{x_n\} \subseteq X$ tales que

$$2\left(||x_n + z||_{\text{UCED}}^2 + ||x_n||_{\text{UCED}}^2\right) - ||2x_n - z||_{\text{UCED}}^2 \to 0$$

Entonces $\{Tx_n\}$ es una sucesión acotada y por la definición de la nueva norma

$$2(||x_n + z||_X^2 + ||x_n||_X^2) - ||2x_n - z||_X^2 \\ +2\left(||Tx_n + Tz||_Y^2 + ||Tx_n||_Y^2\right) - ||2Tx_n - Tz||_Y^2 \to 0$$

Por ser la suma de dos sucesiones positivas acotadas entonces

$$2\left(||Tx_n + Tz||_Y^2 + ||Tx_n||_Y^2\right) - ||2Tx_n - Tz||_Y^2 \to 0$$

y como T es inyectiva, $Tz \neq 0$, lo que es una contradicción de la propiedad UCED en Y. □

Hacemos un pequeño paréntesis para observar que es posible aproximar tanto como queramos la norma original por una norma UCED, siempre que se satisfagan las hipótesis del Teorema de Zizler, considerando $\mu > 0$ y

$$||x||_{\text{UCED}} = \left(||x||_X^2 + \mu\, ||Tx||_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Una aplicación directa del Teorema anterior es el siguiente

Teorema 1.5. *X es isomorfo a un espacio (UCED) si alguna de las siguientes condiciones se cumple*

(a) X^* contiene una familia numerable total sobre X, es decir que existe $(x_n) \subseteq X^*$ tal que si $x \in X$ con $\langle x_n^*, x\rangle = 0$ para todo n, entonces $x = 0$

(b) X es un espacio $\ell_1(\Gamma)$ para algún conjunto Γ

(c) X es un espacio $\mathbb{L}_\infty(\mu)$ para alguna medida μ σ-finita

Demostración. En cada caso encontramos un operador lineal, acotado e inyectivo que va a dar a un espacio de Hilbert.

(a) $T : X \longmapsto \ell_2$ definida por $Tx = \{\frac{\langle x_n^*, x\rangle}{2^n}\}$ donde (x_n^*) es la familia numerable total.

(b) $T : \ell_1(\Gamma) \hookrightarrow \ell_2(\Gamma)$ (Teorema (2) del apéndice)

(c) $T : \mathbb{L}_\infty(\mu) \hookrightarrow \mathbb{L}_2(\mu)$ para μ finita. (Teorema (1) del apéndice)
El caso σ-finita lo extendemos agregando pesos. Si $\mathbb{L}_\infty(\mu) = \cup_n X_n$ con $\mu(X_n) < \infty$ para todo n, ponemos $T' = \sum_n \frac{T_n}{2^n}$ donde T_n es la inclusión de X_n a $\mathbb{L}_2(\mu)$.

□

Claramente tenemos que la noción de espacio UCED, se encuentra entre la de UC y SC, es decir, espacios UC son UCED y espacios UCED son SC. Los siguientes ejemplos muestran que no es posible revertir las implicaciones anteriores.

Ejemplo 1.2 (SC no UCED). *Consideremos el espacio* $X = (\mathcal{C}[0,1], ||\cdot||_\mu)$ *con*

$$||f||_\mu = ||f||_\infty + ||f||_{\mathbb{L}_2}$$

Sea $z(t) = 1/5$ *y*

$$w_n(t) = \begin{cases} 1/5 & 0 \le t \le \frac{1}{2n} \\ -4/5 & t = 1/2 \\ \textit{lineal en otro caso} & \end{cases}$$

Se puede demostrar que el espacio con la norma $||\cdot||_\mu$ *es SC. Si ponemos* $x_n = w_n + z$, $y_n = w_n - z$*; simples cálculos concluyen que* $||x_n|| = ||y_n|| = 1$ *para todo* n*;* $x_n - y_n = 2z$ *y* $\left|\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|\right| \longrightarrow 1$ *pero* $z \neq 0$

Ejemplo 1.3 (UCED no UC). $\mathcal{C}[0,1]$ *puede renormarse para ser UCED. En efecto, sea* $\{t_n\} \subseteq [0,1]$ *una sucesión densa y* $\mu > 0$*. La norma*

$$||f|| = ||f||_\infty + \mu \left(\sum_n \frac{f(t_n)}{2^n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

es UCED, por un argumento completamente similar al Teorema (1.4). Ahora tal renormamiento no puede ser UC, pues $\mathcal{C}[0,1]$ *no es reflexivo.*

A partir de este ejemplo podemos concluir que todos los espacios separables admiten un renormamiento UCED, por la universalidad *en* $\mathcal{C}[0,1]$[3]

La siguiente propiedad es una localización de convexidad, en el sentido de que se fija un punto.

Definición 1.4 (LUC). *Diremos que el espacio* X *es localmente uniformemente convexo (LUC) si para cualquier sucesión* $\{x_n\} \subseteq X$ *y* $x_0 \in S_X$ *tales que* $||x_n|| \to 1$ *y* $\left|\left|\frac{x_n+x_0}{2}\right|\right| \to 1$, *entonces* $x_n \to x_0$

La siguiente definición es una 'direccionalización' de la convexidad uniforme, es decir la bola es uniformemente continua en cierta dirección.

Definición 1.5 (WUC). *Diremos que el espacio* X *es débilmente uniformemente convexo (WUC) si para cualesquiera sucesiones* $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$, *tales que* $||x_n|| \to 1$, $||y_n|| \to 1$ *y* $\left|\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|\right| \to 1$, *entonces* $x_n \xrightarrow{w} y_n$.

Observación 1.1. *La propiedad anterior se puede formular para el espacio dual, en donde se considera la* w^**-topología en lugar de la* w*-topología. Así tendremos la propiedad* w^**-UC*

[3]Esto es el Teorema de Banach-Mazur: Todo subespacio separable es isomorfo-isométrico a un subespacio cerrado de $\mathcal{C}[0,1]$.

Ejemplo 1.4 (LUC no WUC). *Sea $X = (\ell_1, ||\cdot||)$ con*

$$||x|| = \left(||x||_1^2 + ||x||_2^2\right)^{1/2}$$

X es LUC:

Sean $||x_n|| \longrightarrow ||x|| = 1$ y $\left|\left|\frac{x_n+x}{2}\right|\right| \longrightarrow 1$ de modo que

$$2(||x_n||^2 + ||x||^2) - ||x_n + x||^2 \longrightarrow 0$$

Entonces

$$2(||x_n||_1^2 + ||x||_1^2) - ||x_n + x||_1^2 \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$
$$2(||x_n||_2^2 + ||x||_2^2) - ||x_n + x||_2^2 \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

De (1.2) y por la equivalencia de normas ℓ_1 y ℓ_2:

$$||x_n||_2 \longrightarrow ||x||_2$$

y de (1.3)

$$\left|\left|\frac{x_n + x}{2}\right|\right|_2 \longrightarrow ||x||_2$$

y puesto que ℓ_2 es LUC se sigue la afirmación.

Finalmente, supongamos que X es WUC, puesto que ℓ_1 posee la propiedad de Schur[4]*, entonces sería UC y por Milman-Pettis (1.2) sería reflexivo, lo cual no es posible.*

De la misma manera tenemos que $(\mathcal{C}[0,1], ||\cdot||_Z)$ con la *norma de Zizler* dada por la inclusión $\mathcal{C}[0,1] \hookrightarrow \mathbb{L}_2$ es (UCED); pero por la universalidad de $\mathcal{C}[0,1]$ con respecto a los espacios de Banach separables, no puede ser WUC.

Teorema 1.6. *Si un espacio es LUC, entonces es SC.*

Demostración. Supongamos que X no es SC y sean $x \neq y \in S_X$ con $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_X$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Sea $z_n = \frac{x}{n} + \frac{(n-1)y}{n} \in S_X$ y notemos que converge en norma a y. Por otro lado $\frac{x+z_n}{2} \in S_X$ y por LUC converge en norma a x, esto nos lleva a una contradicción y por lo tanto X es SC. □

Las generalizaciones de convexidad anteriores comparten una noción en común, lo cuál identificamos con la siguiente definición.

[4]Un espacio X satisface la propiedad de Schur si las topologías débil y fuerte comparten las mismas sucesiones convergentes.

Definición 1.6 (P-regular)**.** *Decimos que una norma r satisface la propiedad geométrica P-regular si para dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ tales que $r(x_n), r(y_n) \leq 1/2$ y*

$$\lim 2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n) = 0$$

entonces $x_n - y_n \longrightarrow 0$ bajo alguna topología.

El teorema (1.3) nos dice que los espacios UCED son P-regulares. El siguiente teorema establece ésta última propiedad para los espacios LUC.

Teorema 1.7. *Tenemos la siguiente equivalencia para espacios LUC*

(I) X es LUC

(II) Sea $x_0 \in S_X$ y $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión acotada tal que

$$2(||x_n||^2 + ||x_0||^2) - ||x_n + x_0||^2 \longrightarrow 0$$

entonces $x_n \longrightarrow x_0$.

Demostración. Que (II) implica (I) es inmediato. Para la otra implicación pongamos a $x_0 \in S_X$ y $\{x_n\}$ una sucesión acotada tal que

$$2(||x_n||^2 + ||x_0||^2) - ||x_n + x_0||^2 \longrightarrow 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2\left(||x_n||^2 + ||x_0||^2\right) - ||x_n + x_0||^2 \geq & 2\left(||x_n||^2 + ||x_0||^2\right) \\ & - (||x_n|| + ||x_0||)^2 \\ = & (||x_n|| - ||x_0||)^2 \end{aligned}$$

Entonces $(||x_n|| - ||x_0||) \to 0$ y por lo tanto $||x_n|| \to 1$. Finalmente $\left|\left|\frac{x_n + x_0}{2}\right|\right| \to 1$ y como X es LUC, entonces $x_n \longrightarrow x_0$. □

En un espíritu similar, es posible demostrar:

Teorema 1.8. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) X es WUC

(II) Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ con $\{x_n\}$ acotada tales que

$$2(||x_n||^2 + ||y_n||^2) - ||x_n + y_n||^2 \longrightarrow 0$$

entonces $x_n \xrightarrow{w} y_n$.

El Teorema de Zizler es una herramiento poderosa para establecer la propiedad UCED. Sin embargo, puede que en muchos casos las hipótesis del Teorema sean muy restrictivas. El siguiente Teorema tratará de relajar una de ellas: la inyectividad. En cierto sentido la norma de Zizler se puede considerar como un promedio de las normas, nos gustaría que justo en donde el operador T no es uno-a-uno, es decir, donde $\mathrm{Ker}\, T \neq 0$, la norma original satisfaga

$$2^{p-1}\left(||x_n + z||^p + ||x_n||^p\right) - ||2x_n - z||^p \longrightarrow 0$$

con $2 \leq p < \infty$, esto es que sea UC en dichas direcciones. Precisamos esta última oración con la siguiente definición.

Definición 1.7. *Diremos que* $(X, ||\cdot||)$ *es UC* en las direcciones del conjunto $A \subseteq X$ *si se cumple alguna de las equivalentes:*

(I) *Para todo* $z \in S_A$ *y* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left.\begin{array}{c} x, y \in S_X \\ \\ x - y = \lambda z \\ \\ |\lambda| < \epsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1 - \delta$$

(II) *Para ningún* $z \in A - \{0\}$ *existe una sucesión* $\{x_n\}$ *tal que*

$$2^{p-1}\left(||x_n + z||^p + ||x_n||^p\right) - ||2x_n - z||^p \longrightarrow 0$$

con $2 \leq p < \infty$.

A continuación extendemos el Teorema (1.4) al permitir mapeos no inyectivos, a costa de una hipótesis extra sobre la convexidad del espacio donde tal mapeo no satisface la inyectividad.

Teorema 1.9 (Teorema de Zizler no inyectivo)**.** *Sean* X, Y *espacios de Banach y* $T : X \longmapsto Y$ *un operador lineal y acotado. Sea* Y *UCED, si además* X *es UC en las direcciones de* $KerT$*, entonces* $(X, ||\cdot||_Z)$ *es UCED con la norma de Zizler 'usual':*

$$||x||_Z = \left(||x||_X^2 + ||Tx||_Y^2\right)^{1/2}$$

Demostración. Probaremos que $||\cdot||_Z$ es UCED. Supongamos que existen $z \neq 0$ y $\{x_n\} \subset X$ tales que

$$2(||x_n||_Z^2 + ||y_n||_Z^2) - ||x_n + y_n||_Z^2 \longrightarrow 0$$

pero $z \neq 0$.

Por definición de la norma $||\cdot||_Z$:

$$2(||x_n||_X^2 + ||y_n||_X^2) - ||x_n + y_n||_X^2 \\ +2\left(||Tx_n||_Y^2 + ||Ty_n||_Y^2\right) - ||Tx_n - Ty_n||_Y^2 \to 0$$

Por ser la suma de dos sucesiones positivas acotadas entonces

$$2\left(||Tx_n||_Y^2 + ||Ty_n||_Y^2\right) - ||Tx_n - Ty_n||_Y^2 \to 0$$

con $\{Tx_n\}$ una sucesión acotada en Y y $Tx_n - Ty_n \xrightarrow{w} Tz$, pues T es lineal y acotada.

Como Y es UCED, entonces $Tz = 0$, es decir, $z \in \ker T \setminus \{0\}$. Esto último implica que

$$2\left(||x_n + z||_X^2 + ||x_n||_X^2\right) - ||2x_n - z||_X^2 \not\to 0$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Este Teorema nos ayuda a establecer la propiedad UCED en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5 (UCED no LUC)**.** *Sea $\{\alpha_i\} \subseteq \mathbb{R}$ con $\alpha_i \downarrow 0$; sea $T : \ell_2 \longmapsto \ell_2$ definido por*

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Finalmente sea $X = (\ell_2, ||\cdot||_Z)$ donde

$$||x||_Z = \left(||x||_F^2 + ||Tx||_2^2\right)^{1/2}$$
$$||x||_F = |x(1)| + \left(\sum_{j\geq 2} |x(j)|^2\right)^{1/2}$$

Para ver que es (UCED) apelamos al Teorema de Zizler no inyectivo (1.9), puesto que $KerT = span\{e_1\}$, nos limitamos a probar que $||\cdot||_F$ es (UC) en la dirección de e_1:

Sean $x, y \in S_{(X,||\cdot||_F)}$ con $x - y = \epsilon e_1$; de modo que $x(n) = y(n)$ para todo $n \geq 2$. Por otro lado puesto que ambos tienen norma-F igual a uno, $|x(1)| = |y(1)|$ y puesto que son distintos $x(1) = -y(1)$. Luego entonces,

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|_F = \left|\frac{x(1)+y(1)}{2}\right| + \left(\sum_{n\geq 2}\left|\frac{x(n)+y(n)}{2}\right|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{n\geq 2}\left|\frac{x(n)+y(n)}{2}\right|^2\right)^{1/2} = ||x||_F - |x(1)| = 1 - \epsilon/2$$

lo que demuestra que es UC en la dirección de e_1

Para ver que no es LUC basta con tomar $x_0 = e_1$ y $x_n = e_n$.

Regresando nuevamente a la definición de UC, observemos que la condición

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1-\delta \quad ,\delta > 0 \tag{UC2}$$

puede sustituirse por

$$d(0, \mathrm{conv}(x,y)) < 1-\delta' \quad ,\delta' > 0 \tag{UC2.2}$$

posiblemente con distintas deltas.

Por otro lado, la condición de separación en UC, es decir

$$||x-y|| > \epsilon$$

puede reemplazarse por una versión secuencial como $\mathrm{sep}\{x_n\} > \epsilon$.

En parte esto puede motivar la siguiente definición.

Definición 1.8 (NUC)**.** *Un espacio es (NUC) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq X$*

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n\;\; x_n \in B_X \\ \\ sep\{x_n\} > \epsilon\end{array}\right\} \Longrightarrow d(0, conv(x_n)) < 1-\delta$$

La discusión anterior motiva el enunciado de la siguiente proposición

Teorema 1.10. *Los espacios UC son NUC.*

La demostración es inmediata una vez que notamos que una definición equivalente de los espacios NUC es la siguiente: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ tal que para todo n, $x_n \in B_X$ y $\mathrm{sep}\{x_n\} > \epsilon$, entonces $\mathrm{conv}(x_n) \cap B(0,\delta) \neq \emptyset$.

Observación 1.2. *En espacios de dimensión finita, no existen sucesiones acotadas con separación positiva, entonces por vacuidad todo espacio de dimensión finita es NUC. Por lo que existen espacios NUC no UC.*

Del mismo modo que con el módulo de convexidad, es posible definir el *módulo de convexidad no-compacto* para escalar la propiedad NUC.

Definición 1.9 (Módulo de convexidad no-compacto)**.** *El módulo de convexidad no-compacto de un espacio X es una función $\Delta_X : [0,2] \longmapsto [0,1]$ definida por*

$$\Delta_X(\epsilon) = \inf\{1 - d(0,E)\}$$

donde el ínfimo se toma sobre los subconjuntos convexos de la bola unitaria con $\alpha(E) \geq \epsilon$

Notemos que para cualquier conjunto E con $\alpha(E) \geq \epsilon$ se tiene que $\text{diam}(E) \geq \epsilon$ y entonces $\Delta_X(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$ para toda $\epsilon \in [0,2]$. El módulo de convexidad no-compacto tiene asociado un número ϵ_1 definido como sigue:

Definición 1.10 (Coeficiente de convexidad no-compacto)**.** *El coeficiente de convexidad no-compacto $\epsilon_1(X)$ es el número*

$$\epsilon_1(X) := \sup\{\epsilon \geq 0 \mid \Delta_X(\epsilon) = 0\}$$

Teorema 1.11. *Si X es NUC, entonces $\epsilon_1(X) = 0$.*

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$ y E un subconjunto convexo de la bola unitaria con $\alpha(E) \geq \epsilon$. Será suficiente construir una sucesión dentro de E con $\text{sep}\{x_n\} \geq \epsilon$, pues en tal caso por NUC existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$d(0,E) \leq d(0, \text{conv}(x_n)) < 1 - \delta(\epsilon)$$

y entonces

$$\Delta_X(\epsilon) \geq \delta(\epsilon) > 0$$

Por lo que para ningún $\epsilon > 0$, $\Delta_X(\epsilon) = 0$ y finalmente $\epsilon_1(X) = 0$.

Vemos que es posible construir dicha sucesión. Tomemos $x_1 \in E$; y encontramos $x_2 \in E$ tal que $||x_2 - x_1|| \geq \epsilon$ pues de otro modo tendríamos que $\sup_{x \in E} ||x - x_1|| < \epsilon$ y entonces $\text{diam}(E) < \epsilon$, lo cual es un absurdo. Del mismo modo buscamos $x_3 \in E$ tal que $||x_3 - x_2|| \geq \epsilon$ y $||x_3 - x_1|| \geq \epsilon$. Nuevamente esto es posible, pues de otro modo llegaríamos a la contradicción de que $\text{diam}(E) < \epsilon$. Como es usual se procede de forma inductiva para construir la sucesión. □

La siguiente es una caracterización de espacios no-reflexivos debida a James.

Teorema 1.12. *Un espacio X es no reflexivo si y sólo si para todo $t \in (0,1)$ existen sucesiones $\{x_n\} \subseteq B_X$ y $\{x_n^*\} \subseteq B_{X^*}$ tales que para $i, j = 1, 2\ldots$*

$$\langle x_j^*, x_i \rangle = \begin{cases} t & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

Teorema 1.13. *Sea X con $\epsilon_1(X) < 1$, entonces X es reflexivo. En particular tenemos que todo espacio NUC es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que X no es reflexivo. Por el Teorema de no-reflexividad de James (1.12) sea $t \in (0,1)$ y $\{x_n\} \subseteq B_X$; $\{x_n^*\} \subseteq B_{X^*}$ tales que para $i, j = 1, 2\ldots$

$$\langle x_j^*, x_i \rangle = \begin{cases} t & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

Si $E = \operatorname{conv}(x_n)$, entonces para toda $z \in E$, $||z|| \geq t$ y en vista de que $||x_j - x_i|| \geq \langle x_j^*, x_j - x_i \rangle = t$ para $j > i$, entonces $\alpha(E) \geq t$. Entonces

$$\Delta_X(t) \leq 1 - t$$

y por la monotonicidad de Δ_X, entonces $\epsilon_1(X) \geq 1$, y llegamos a una contradicción. $\square$

1.2. Suavidad

En esta sección discutiremos distintas nociones de suavidad y su estrecha relación con la convexidad del espacio. Esta sección se fundamenta principalmente en [Die75]. Con base en los métodos ahí revisados, introducimos el concepto de un espacio nuevo (WUS) y daremos su caracterización.

Un mapeo $x \longmapsto f_x$ de $X \setminus \{0\}$ a $X^* \setminus \{0\}$ es un *mapeo soporte* si

(I) $||x||$=1 implica $||f_x|| = 1 = f_x(x)$

(II) $\lambda \geq 0$ implica $f_{\lambda x} = \lambda f_x$

Definición 1.11. *(Espacio suave) Decimos que un espacio X es suave en $x_0 \in S_X$ siempre que existe una funcional $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = 1$. Si X es suave sobre toda la esfera unitaria, decimos que X es suave.*

La noción de suavidad debe estar conectada con la de diferenciabilidad, antes de estudiar esta relación damos la definición de la diferenciabilidad de una norma

Definición 1.12. *Un espacio de Banach X tiene una norma* Gâteaux diferenciable *en $x_0 \in S_X$ si para $y \in S_X$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||}{\lambda} = \rho'(x_0, y)$$

existe. Si la norma de X es Gâteaux diferenciable sobre todo punto de la esfera unitaria, entonces decimos que X tiene norma Gâteaux diferenciable y que el espacio es Gâteaux diferenciable (GD).

Teorema 1.14. *Sea $x_0 \in S_X$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) X es suave en x_0

(II) Todo mapeo soporte $x \longmapsto f_x$ es $||\cdot|| - w^*$ continuo de S_X a S_{X^*} en x_0

(III) Existe un mapeo soporte $x \longmapsto f_x$,. $||\cdot|| - w^*$ continuo de S_X a S_{X^*} en x_0

(IV) La norma de X es Gâteaux diferenciable en x_0

Demostración.

[$(I) \implies (II)$] Sea $x \longmapsto f_x$ un mapeo soporte que no es $||\cdot|| - w^*$ continuo en x_0. Entonces existe una sucesión $(x_n) \in S_X$ tal que $x_n \overset{||\cdot||}{\to} x_0$ pero $f_{x_n} \overset{w^*}{\not\to} f_{x_0}$. Pasando por una subsucesión encontramos una w^*-vecindad, U de f_{x_0} tal que $f_{x_n} \notin U$ para toda n. Por el Teorema de Banach-Alaoglu f_{x_n} tiene un w^*-punto de acumulación f. Entonces

$$\begin{aligned} |f(x_0) - 1| =& |f(x_0) - f_{x_n}(x_n)| \\ \leq& |f(x_0) - f_{x_n}(x_0)| + |f_{x_n}(x_0) f_{x_n}(x_n)| \\ \leq& |f(x_0) - f_{x_n}(x_0)| + ||x_n - x_0|| \end{aligned}$$

Y entonces $f(x_0) = 1$ y $f \in S_X^*$. Como x_0 es un punto de suavidad de S_X, $f_{x_0} = f$. Luego entonces, f_{x_0} es un punto de acumulación de f_{x_n}, lo que contradice la elección de f_{x_n}.

Que (II) implica (III) es claro.

[$(III) \implies (IV)$] Sea $\lambda > 0$ y $y \in S_X$

$$\begin{aligned} \frac{f_{x_0}(y)}{||x_0||} =& \frac{f_{x_0}(\lambda y)}{\lambda\, ||x_0||} = \frac{f_{x_0}(x_0) - 1 + f_{x_0}(\lambda y)}{\lambda\, ||x_0||} \\ =& \frac{f_{x_0}(x_0) + f_{x_0}(\lambda y) - ||x_0||^2}{\lambda\, ||x_0||} = \frac{f_{x_0}(x_0 + \lambda y) - ||x_0||^2}{\lambda\, ||x_0||} \\ \leq& \frac{|f_{x_0}(x_0 + \lambda y)| - ||x_0||^2}{\lambda\, ||x_0||} \leq \frac{||f_{x_0}||\, ||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||^2}{\lambda\, ||x_0||} \\ =& \frac{||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||}{\lambda} \leq \frac{||x_0 + \lambda y||^2 - |f_{x_0+\lambda y}(x_0)|}{\lambda\, ||x_0 + \lambda y||} \\ =& \frac{f_{x_0+\lambda y}(x_0 + \lambda y) - |f_{x_0+\lambda y}(x_0)|}{\lambda\, ||x_0 + \lambda y||} = \frac{f_{x_0+\lambda y}(x_0) + \lambda f_{x_0+\lambda y}(y) - |f_{x_0+\lambda y}(x_0)|}{\lambda\, ||x_0 + \lambda y||} \\ \leq& \frac{\lambda f_{x_0+\lambda y}(y)}{\lambda\, ||x_0 + \lambda y||} = \frac{f_{x_0+\lambda y}(y)}{||x_0 + \lambda y||} \end{aligned}$$

Por lo que para $\lambda > 0$ y $y \in S_X$ tenemos

$$\frac{f_{x_0}(y)}{||x_0||} \leq \frac{||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||}{\lambda} \leq \frac{f_{x_0+\lambda y}(y)}{||x_0 + \lambda y||} \tag{1.4}$$

y tomando límite vemos que la norma es diferenciable en x_0, más aún descubrimos que la derivada (en la dirección de y) está dada por $\frac{f_{x_0}(y)}{||x_0||}$

[$(IV) \implies (I)$] Supongamos que la norma es Gâteaux diferenciable en x_0. Sea $y \in S_X$ y sea $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = 1$ (existe por el Teorema de Hahn-Banach). De la desigualdad (1.4), para $\lambda > 0$

$$f(y) \leq \frac{||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||}{\lambda}$$

y la desigualdad se revierte si $\lambda < 0$. Vemos entonces que la derivada de la norma en la dirección de y coincide con $f(y)$, y entonces $\{f(y) \mid f \in S_{X^*},\ f(x_0) = 1\}$ es un singulete y así f es única con respecto a $f \in S_{X^*}$.

□

Una noción más fuerte que la de suavidad involucra el fortalecimiento de la diferenciabilidad de la norma.

Definición 1.13. *Decimos que la norma de un espacio de Banach X es Fréchet diferenciable en $x_0 \in S_X$ siempre que el límite*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{||x_0 + \lambda y|| - ||x_0||}{\lambda}$$

exista uniformemente para $y \in S_X$. Si la norma de X es Fréchet diferenciable en todo punto de la esfera unitaria decimos que la norma es Fréchet diferenciable y que el espacio es Fréchet diferenciable (FD).

Teorema 1.15. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(I) *Todo mapeo soporte $x \longmapsto f_x$ es $||\cdot|| - ||\cdot||$ continuo de S_X a S_{X^*} en x_0*

(II) *Existe un mapeo soporte $x \longmapsto f_x$ $||\cdot|| - ||\cdot||$ continuo de S_X a S_{X^*} en x_0*

(III) *La norma de X es Fréchet diferenciable en x_0*

Demostración. Así como en el Teorema anterior, probar que (II) implica (III) se sigue de (1.4).

Para ver que (III) implica (I) es suficiente demostrar que todo mapeo soporte es $||\cdot||-||\cdot||$ continuo.

Sea $f_0 \in S_{X^*}$ tal que $f_0(x_0) = 1$ y consideremos una sucesión (x_n) que converge en norma a x_0. Encontramos una sucesión de mapeos soportes tal que $f_n(x_n) = 1$ y entonces $f_n(x_0) \to 1$. Afirmamos que $||f_n - f_0|| \to 0$.

Supongamos que no. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $(f_n - f_0)(z_n) \geq 2r > 0$ para alguna sucesión (z_n). Entonces

$$\begin{aligned}
f_0(x_0) - f_n(x_0) \leq & [f_0(x_0) - f_n(x_0)] \left[\frac{1}{r}(f_n(z_n) - f_0(z_n)) - 1\right] \\
= & [f_n(x_0) - f_0(x_0)] + \left[\frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))(f_n(z_n) - f_0(z_n))\right] \\
= & (f_n - f_0)(x_0 + \frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n) \\
\leq & |f_n(x_0 + \frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n)| - f_0(x_0 + \frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n) \\
\leq & \left|\left|x_0 + \frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n\right|\right| - ||x_0|| - f_0(\frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n)
\end{aligned}$$

Poniendo $y_n = \frac{1}{r}(f_0(x_0) - f_n(x_0))z_n$ tenemos que

$$0 < r \leq \frac{(f_0 - f_n)(x_0)}{||y_n||} \leq \frac{||x_0 + y_n|| - ||x_0|| - f_0(y_n)}{||y_n||} \to 0$$

pues supusimos que la norma es Fréchet diferenciable, y llegamos a una contradicción. $\square$

Los siguientes resultados nos ayudarán a establecer renormamientos con normas suficientemente 'suaves'.

Lema 1.16. *Sea X^* LUC y (f_n) una sucesión en S_{X^*} tal que*

$$f_n \xrightarrow{w*} f_0 \in S_{X^*}$$

entonces

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||} f_0$$

Demostración. Por la convergencia débil-estrella, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$ y entonces $\frac{f_n(x)+f_0(x)}{2} \longrightarrow f_0(x)$ y de este modo $\frac{||f_n+f_0||}{2} \longrightarrow 1$. Por LUC f_n converge en norma a f_0. $\square$

Lema 1.17. *(I) Si X^* es SC, entonces X es suave.*

(II) Si X^* es LUC entonces X es FD.

Demostración. (I) Si X no es suave, entonces existen $x_0 \in S_X$ y $f \neq g \in S_x^*$ tal que $f(x_0) = 1 = g(x_0)$. De esta forma $\lambda f + (1-\lambda)g \in B_X$ con $\lambda f(x_0) + (1-\lambda)g(x_0) = 1$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ y entonces $\lambda f + (1-\lambda)g \in S_{X^*}$, lo cual es una contradicción.

(II) Si X^* es LUC entonces es SC y por el inciso (I) es suave. Pongamos $x \longmapsto f_x$ el mapeo soporte, $||\cdot|| - w^*$ continuo. Sea $(x_n) \in S_X$ una sucesión convergente en norma a $x_0 \in S_X$ y entonces $f_{x_n} \overset{w*}{\to} f_{x_0}$ y del lema (1.16) concluimos que la convergencia es en norma: $f_{x_n} \overset{||\cdot||}{\to} f_{x_0}$, por lo que la norma de X es Fréchet diferenciable. $\square$

Definición 1.14. *Un espacio X es uniformemente suave (US) siempre que para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in S_x$ y $||y|| < \delta$ entonces*

$$||x + y|| + ||x - y|| < 2 + \epsilon\, ||y||$$

De forma casi inmediata la misma definición de suavidad uniforme sugiere un módulo de suavidad, así como lo hicimos para la convexidad uniforme.

Definición 1.15. *Sea X un espacio de Banach y $\tau \geq 0$. A la función $\rho_X : [0, \infty) \longmapsto [0, \infty)$ definida por*

$$\rho_X(\tau) = \sup\{\frac{||x + y|| + ||x - y|| - 2}{2} \mid\ ||x|| = 1\ ,\ ||y|| = \tau\}$$

le llamamos el módulo de suavidad de X.

Notemos que X es US si y sólo si $\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} \to 0$ a medida que $\tau \to 0$.

Teorema 1.18. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach, $\delta(\epsilon)$ el módulo de convexidad asociado al espacio $(X, ||\cdot||)$ y $\rho^*(\tau)$ el módulo de suavidad del espacio dual con norma dual $(X^*, ||\cdot||^*)$. Entonces para todo $\tau > 0$*

$$\rho^*(\tau) = \sup\{\tau\frac{\epsilon}{2} - \delta(\epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}$$

De forma análoga si $\rho(\tau)$ es el módulo de suavidad para $(X, ||\cdot||)$ y $\delta^*(\epsilon)$ el módulo de convexidad para el espacio $(X^*, ||\cdot||^*)$; entonces para todo $\tau > 0$

$$\rho(\tau) = \sup\{\tau\frac{\epsilon}{2} - \delta^*(\epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}$$

Demostración. Primero probaremos que para $\epsilon \in (0, 2]$ y $\tau > 0$

$$\delta(\epsilon) + \rho^*(\tau) \geq \tau\epsilon/2$$

Sean $x, y \in S_X$ tal que $||x - y|| \geq \epsilon$ y $f, g \in S_{X^*}$ tal que $f(x + y) = ||x + y||$ y $g(x - y) = ||x - y||$. De la definición de $\rho^*(\tau)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
2\rho^*(\tau) \geq& \, ||f + \tau g||^* + ||f - \tau g||^* - 2 \\
\geq& (f + \tau g)(x) + (f - \tau g)(y) - 2 \\
=& f(x + y) + \tau g(x - y) - 2 = ||x + y|| + \tau \, ||x - y|| - 2 \\
\geq& \, ||x + y|| + \tau\epsilon - 2
\end{aligned}$$

Luego $2 - ||x + y|| \geq \tau\epsilon - 2\rho^*(\tau)$ y por la definición del módulo de convexidad: $\delta(\epsilon) + \rho^*(\tau) \geq \tau\epsilon/2$. De este modo

$$\rho^*(\tau) \geq \sup\{\tau\frac{\epsilon}{2} - \delta(\epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}$$

Para la otra desigualdad tomemos $\tau > 0$ y $f, g \in S_{X^*}$. Para $\eta > 0$ existen $x, y \in S_X$ tal que $(f + \tau g)(x) \geq ||f + \tau g||^* - \eta$ y $(f - \tau g)(x) \geq ||f - \tau g||^* - \eta$ y entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(||f + \tau g||^* + ||f - \tau g||^* - 2\right) \leq& \frac{1}{2}(f(x + y) - 2) + \frac{\tau}{2}g(x - y) + \eta \\
\leq& \left(\left|\left|\frac{x + y}{2}\right|\right| - 1\right) + \frac{\tau}{2}\,||x - y|| + \eta \\
\leq& - \delta\,||x - y|| + \frac{\tau}{2}\,||x - y|| + \eta \\
\leq& \sup\{t\frac{\epsilon}{2} - \delta(\epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq 2\} + \eta
\end{aligned}$$

Como $\eta > 0$ es arbitrario tenemos que

$$\rho^*(\tau) \leq \sup\{\tau\frac{\epsilon}{2} - \delta(\epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}$$

El enunciado dual se obtiene de forma totalmente análoga. □

Corolario 1.19. *Son equivalentes:*

(I) X es US (UC)

(II) X^* es UC (US)

Corolario 1.20. *Si X es US entonces es reflexivo.*

Demostración. Del Teorema anterior tenemos que el dual X^* es UC, y por el Teorema de Milman-Pettis (1.2) es reflexivo, por lo tanto X es reflexivo. □

Ahora introducimos una nueva noción de suavidad, la cual resulta ser el dual de un espacio WUC.

Definición 1.16. *Sea X un espacio de Banach, decimos que es débilmente uniformemente suave (WUS) si el módulo de suavidad débil $\rho_X(\tau, y) : [0, \infty) \times S_X \longmapsto [0, \infty)$ definido por*

$$\rho_X(\tau, y) = \sup\{\frac{||x + \tau y|| + ||x - \tau y|| - 2}{2} \mid x \in S_X\}$$

satisface

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau, y)}{\tau} = 0$$

para todo $y \in S_X$.

Casi por construcción tenemos el siguiente Teorema

Teorema 1.21. *(I) Un espacio X es WUC si y sólo si X^* es WUS*

(II) Un espacio X es WUS si y sólo si X^* es w^*-UC

Demostración.

(I) El módulo de suavidad débil para el espacio dual X^* está dado por:

$$\begin{aligned}
2\rho_{X^*}(\tau, y^*) &= \sup\{||x^* + \tau y^*|| + ||x^* - \tau y^*|| - 2 \mid x^* \in S_{X^*}\} \\
&= \sup\{\tau \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, x\rangle + \tau \langle x^*, y\rangle - \langle y^*, y\rangle - 2 \mid x^* \in S_{X^*}\ x, y \in S_X\} \\
&= \sup\{||x + y|| + \tau \langle y^*, x - y\rangle - 2 \mid x, y \in S_X\} \\
&= \sup\{||x + y|| + \tau\epsilon - 2 \mid x, y \in S_X\ , \langle y^*, x - y\rangle = \epsilon\ 0 \leq \epsilon \leq 2\} \\
&= \sup\{\tau\epsilon - 2\delta_X(\epsilon, y^*) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}
\end{aligned}$$

donde $y^* \in S_{X^*}$ y $\delta_X(\epsilon, y^*)$ es el módulo de convexidad-WUC:

$$\delta_X(\epsilon, y^*) = \inf\left\{\{1\} \cup \left\{1 - \left|\left|\frac{x + y}{2}\right|\right| \quad \mid \quad x, y \in S_X\ , |\langle y^*, x - y\rangle| \geq \epsilon\right\}\right\}$$

El espacio es WUC si y sólo si $\delta_X(\epsilon, y^*) > 0$ para todo $y^* \in S_{X^*}$ y todo $\epsilon \in (0, 2]$. Finalmente $\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_{X^*}(\tau, y^*)}{\tau} = 0$

(II) La demostración es igual a la anterior, salvo que el coeficiente de convexidad apropiado es $\delta_{X^*}(\epsilon, y)$ definido como

$$\delta_{X^*}(\epsilon, y) = \text{ínf}\left\{\{1\} \cup \left\{1 - \left|\left|\frac{x^* + y^*}{2}\right|\right| \quad | \quad x^*, y^* \in S_{X^*}\ , |\langle y, x^* - y^*\rangle| \geq \epsilon\right\}\right\}$$

con $\epsilon \in (0, 2]$ y $y \in S_X$, que caracteriza a los espacios w^*-UC y la relación es

$$2\rho_X(\tau, y) = \sup\{\tau\epsilon - 2\delta_{X^*}(\epsilon, y) \mid 0 < \epsilon \leq 2\}$$

□

Ya que hemos tomado un camino nada estándar para encontrar la propiedad dual de un espacio WUC, exploramos qué modo de diferenciabilidad satisface la norma de un espacio WUS.

Definición 1.17. *La norma de un espacio es uniformemente Gâteaux si para todo $y \in S_X$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{||x + \lambda y|| - ||x||}{\lambda}$$

existe uniformemente en $x \in S_X$

Observación 1.3. *Hay una gran similitud entre uniformemente Gâteaux diferenciable y Fréchet diferenciable, sin embargo difieren en dónde existe la 'uniformidad': uniformemente Gâteaux diferenciable lo es sobre x mientras que Fréchet diferenciable lo es sobre y. viceversa.*

Caracterizamos completamente a los espacios WUS en el siguiente Teorema con la estructura ya familiar de los Teoremas de dualidad de esta sección.

Teorema 1.22. *Son equivalentes*

(I) *X es WUS (WUC)*

(II) *X^* es w^*-UC (WUS)*

(III) *Todo mapeo soporte $x \longmapsto f_x$ es $||\cdot|| - w^*$ uniformemente continuo de S_X a S_{X^*}*

(IV) *Existe un mapeo soporte $x \longmapsto f_x$ es $||\cdot|| - w^*$ uniformemente continuo de S_X a S_{X^*}*

(V) *La norma de X es uniformemente Gâteaux diferenciable*

Demostración.
$[(I) \Longrightarrow (II)]$ Esto es el Teorema (1.21)

$[(II) \Longrightarrow (III)]$ Sea $\epsilon > 0$, por w^*-UC, existe $\delta > 0$ tal que si $||f_x + f_y|| > 2 - \delta$ entonces $\langle f_x - f_y, z\rangle < \epsilon$ para todo $z \in X$. Sea $x, y \in S_X$ con $||x - y|| < \delta$. Luego entonces, $||f_x + f_y|| + ||x - y|| \geq 2$ y entonces $||f_x + f_y|| > 2 - \delta$ y entonces $\langle f_x - f_y, z\rangle < \epsilon$ para todo

$z \in X$ lo que demuestra la w^*-continuidad uniforme.

$[(III) \Longrightarrow (IV)]$ Es trivial

$[(IV) \Longrightarrow (V)]$ Nuevamente va a ser consecuencia de la desigualdad (1.4)

$[(V) \Longrightarrow (I)]$ Puesto que

$$\frac{||x+\lambda y|| - ||x-\lambda y|| - 2\,||x||}{\lambda} = \left(\frac{||x+\lambda y|| - ||x||}{\lambda}\right) - \left(\frac{||x-\lambda y|| - ||x||}{-\lambda}\right)$$

y el lado derecho converge uniformemente a 0 en $x \in S_X$ entonces

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_{y \in S_X} \frac{||x+\lambda y|| - ||x-\lambda y|| - 2}{\lambda} = 0$$

lo que implica que el espacio es WUS.

□

Finalizamos con el concepto dual de un espacio NUC, introducido por Prus en 1989, cuya definición usa la noción de medida de no-compacidad. Aquí damos una definición equivalente, más fácil de formular.

Definición 1.18. *Un espacio de Banach X es NUS si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda sucesión w-nula en B_X y toda $x \in B_X$, existe un entero $k > 1$ tal que*

$$||x + tx_k|| \leq 1 + t\epsilon$$

para todo $t \in (0, \delta)$

Una extensión natural es reemplazar la condición “para todo $\epsilon > 0$” por “para algún $\epsilon > 0$”; a tales espacios los llamaremos WNUS.

El siguiente teorema da la liga entre los espacios NUC y NUS.

Teorema 1.23. *Un espacio X es NUC si y sólo si el dual X^* es NUS.*

1.3. Estructura Normal

El concepto de *estructura normal*, introducido por Brodski y Milman en 1948, juega un rol importante en la geometría de los espacios de Banach, pues como veremos implica una propiedad geométrica importante: la propiedad del punto fijo. Este concepto fue durante mucho tiempo el caballito de batalla para establecer tal propiedad. Muchos de los resultados de este apartado vienen de [GK90].

Introducimos la siguiente notación, que resultará útil para la formulación de estructura normal. Sean $D, H \subseteq X$, $u \in X$ y pongamos

$$r_u(D) = \sup\{||u - v|| \mid v \in D\} \tag{1.5}$$
$$r_H(D) = \inf\{r_u(D) \mid u \in H\} \tag{1.6}$$
$$C_H(D) = \{u \in H \mid r_u(D) = r_H(D)\} \tag{1.7}$$

el radio de D relativo a u, el radio de Chebyshev y el centro de Chebyshev respectivamente. Claramente tenemos que $r_u(D) \leq \operatorname{diam} D$ y diremos que $u \in D$ es *diametral* si $r_u(D) = \operatorname{diam} D$, y en caso contrario que u es *no-diametral*.

Definición 1.19 (Estructura Normal)**.** *Un subconjunto convexo $K \subseteq X$ tiene estructura normal si todo subconjunto $S \subseteq K$ acotado, convexo con $\operatorname{diam} S > 0$ contiene un punto no-diametral. Si todo subconjunto convexo de X tiene estructura normal (NS), entonces diremos que X tiene NS.*

Definición 1.20. *Una sucesión acotada $\{x_n\} \subseteq X$ es diametral si no es eventualmente constante y*

$$\lim_n d(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}) = \operatorname{diam}\{x_1, \ldots\}$$

Teorema 1.24. *Un suconjunto $K \subseteq X$ acotado y convexo tiene estructura normal si y sólo si no contiene ninguna sucesión diametral.*

Demostración. Si K contiene una sucesión diametral $\{x_n\}$ entonces $\operatorname{conv}\{x_n\}$ es diametral. Por otro lado, supongamos que K contiene un subconjunto convexo, no trivial y diametral S. Sea $d = \operatorname{diam} S$ y $\epsilon \in (0, d)$. Definimos inductivamente una sucesión de la siguiente forma:

Dado $x_1 \ldots, x_n \in S$, x_{n+1} es tal que

$$||y_{n-1} - x_{n+1}|| > d - \epsilon/n^2$$

con $y_{n-1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$. Afirmamos que la sucesión $\{x_n\}$ es diametral. Sea $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, es decir, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Sea $\alpha = \alpha_p = \max \alpha_i$, entonces

$$y_{n-1} = \frac{x}{n\alpha} + \sum_{i \neq p} (\frac{1}{n} - \frac{\alpha_i}{n\alpha}) x_i$$

es una combinación convexa de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} d - \epsilon/n^2 \leq& ||y_{n-1} - x_{n+1}|| \\ \leq& \frac{1}{n\alpha} ||x - x_{n+1}|| + \sum_{i \neq p} (\frac{1}{n} - \frac{\alpha_i}{n\alpha}) ||x_i - x_{n+1}|| \\ \leq& \frac{1}{n\alpha} ||x - x_{n+1}|| + (1 - \frac{1}{n\alpha}) d \end{aligned}$$

Finalmente,

$$||x - x_{n+1}|| \geq (\frac{d}{n\alpha} - \frac{\epsilon}{n^2})n\alpha = d - \frac{\epsilon\alpha}{n} \geq d - \epsilon/n$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario y $x \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ encontramos que la sucesión $\{x_n\}$ es diametral. □

Ejemplo 1.6. *Todo conjunto compacto K tiene NS. Supongamos lo contrario, entonces existe una sucesión diametral y entonces $\text{lím}_n ||x_n - x_i|| > 0$ por lo que no tiene ninguna subsucesión convergente, lo que contradice el Teorema de Bolzano-Weierstrass. Podemos concluir que espacios de dimensión finita tienen NS. Este resultado es importante pues muestra que la propiedad NS está débilmente ligada a cualquier propiedad geométrica.*

Una noción más fuerte que la de NS, se obtiene cuando de manera *uniforme* el radio de todos los conjuntos acotados y convexos está por debajo de su diámetro, es decir,

Definición 1.21. *Un subconjunto $K \subseteq X$ no vacío, acotado y convexo tiene estructura normal uniforme (UNS) si existe una constante $k \in (0, 1)$ tal que*

$$r(D) \leq k \, \text{diam}(D)$$

para todo subconjunto cerrado y convexo $D \subseteq K$. Decimos que el espacio tiene UNS si todo subconjunto convexo no vacío exhibe esta propiedad.

Relacionado con esta propiedad, tenemos el siguiente coeficiente.

Definición 1.22. *El coeficiente de estructura normal de un espacio X se define como el número*

$$N(X) = \sup \left\{ \frac{r(K)}{\text{diam}(K)} \mid K \subseteq X \text{ es acotado y convexo con } \text{diam}(K) > 0 \right\}$$

Es fácil ver que X tiene UNS si y sólo si $N(X) < 1$.

Teorema 1.25. *Si X es UNS, entonces es reflexivo*

Demostración. La estrategia para probar que es reflexivo, será usando el Teorema de Smulian[5]. Sea entonces $\{K_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión descendiente de subconjuntos cerrados y convexos de la bola unitaria en X. Sea $k \in (N(X), 1)$ y consideremos

$$A(K) = \{x \in K \mid ||x - y|| \leq k \, \text{diam}(K) \;\; \forall \, y \in K\}$$

claramente un subconjunto no-vacío, cerrado y convexo de K.

[5] Un conjunto convexo es w-compacto si y sólo si toda sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, convexos y no-vacíos tienen intersección no vacía.

Construimos ahora,

$$\begin{aligned}
K_1^1 =& \overline{\text{conv}} \cup_{i\geq 1} A(K_i^0) \\
K_2^1 =& \overline{\text{conv}} \cup_{i\geq 2} A(K_i^0) \\
& \vdots \\
K_n^1 =& \overline{\text{conv}} \cup_{i\geq n} A(K_i^0) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\text{diam}(K_n^1) \leq k\,\text{diam}(K_n^0)$. Para probar la afirmación, sean $x, y \in \cup_{i\geq n} A(K_i^0)$. Entonces, $x \in A(K_p^0)$ y $y \in A(K_q^0)$ con $n \leq p \leq q$. Como $K_q^0 \subseteq K_p^0$, de la definición de $A(K_p^0)$ tenemos que

$$||x-y|| \leq k\,\text{diam}(K_p^0) \leq k\,\text{diam}(K_n^0)$$

y queda probada la afirmación.

Repitiendo la construcción tenemos la siguiente cadena

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1^0 & \supseteq & K_2^0 & \supseteq & \cdots & \supseteq & K_n^0 & \supseteq & \cdots \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
K_1^1 & \supseteq & K_2^1 & \supseteq & \cdots & \supseteq & K_n^1 & \supseteq & \cdots \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
K_1^n & \supseteq & K_2^n & \supseteq & \cdots & \supseteq & K_n^n & \supseteq & \cdots
\end{array}$$

Como $\text{diam}(K_i^n) \leq k^n\,\text{diam}(K_1^0) \to 0$, la sucesión diagonal $(K_{n+1}^n)_n$ tiene intersección no vacía por el Teorema de Cantor. Por el Teorema de Smulyan B_X es w-compacto y entonces X es reflexivo (Teorema de Kakutani). □

Los siguientes resultados nos ayudarán a establecer estructura normal para espacios suficientemente 'redondos'.

Teorema 1.26. *Si el módulo de convexidad δ_X satisface $\delta_X(1) > 0$, entonces X tiene UNS y*

$$N(X) \leq 1 - \delta_X(1)$$

Demostración. Sea K un subconjunto cerrado y convexo con $\text{diam}(K) = d > 0$. Sea $\mu > 0$ tal que $d - \mu > \epsilon d$ con $\epsilon > 1$ y $u, v \in K$ con $||u - v|| \geq d - \mu$ y $z = \frac{u+v}{2}$. Entonces para cualquier $x \in K$

$$||x-u|| \leq d\ , \qquad ||u-v|| \geq d-\mu$$

y

$$||x-z|| \leq \left[1 - \delta_X(\frac{d-\mu}{d})\right] d$$

y como $\delta_X(\frac{d-\mu}{d}) > 0$, z es un punto no-diametral de K.

Finalmente,

$$||x - z|| \leq [1 - \delta_X(1)] \operatorname{diam}(K)$$

de donde se sigue que

$$N(X) \leq 1 - \delta_X(1)$$

$\square$

Corolario 1.27. *Los espacios UCED cumplen con NS.*

Demostración. Sea K un subconjunto de X cerrado y convexo con al menos dos puntos distintos x, y. Sea $z = \frac{x+y}{2}$. Afirmamos que z es no-diametral. De lo contrario, encontramos una sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ tal que

$$\lim_n ||z - x_n|| = \operatorname{diam} K$$

Para todo $n \geq 1$

$$\max(||x - x_n||, ||y - x_n||) \leq \operatorname{diam} K$$

Lo anterior implica que

$$\lim_n ||x - x_n|| = \lim_n ||y - x_n|| = \operatorname{diam} K \quad \text{y} \quad \lim_n ||(x - x_n) - (y - x_n)|| = 2 \operatorname{diam} K$$

Por UCED, $x - y = \lim_n((x - x_n) - (y - x_n)) = 0$, lo que nos conduce a una contradicción. $\square$

Sin embargo en la implicación anterior no se cumple la condición conversa, y más aún existen espacios con estructura normal sin ser isomorfos a un espacio UCED ([KL95]).

En 1982 Turret fortaleció un Teorema de Baillon respecto al módulo de suavidad (en vista de la relación dual con el módulo de convexidad y el Teorema anterior). Su enunciado y demostración es la siguiente:

Teorema 1.28. *Sea X un espacio de Banach con $\rho'_X(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} < 1/2$, entonces cumple con NS.*

Demostración. Supongamos que X no tiene NS. Entonces existe una sucesión diametral $\{x_n\} \subseteq B_X$ tal que $w - \lim_n x_n = 0$, $\lim_n ||x_n|| = 1$ y $\operatorname{diam}(x_n) \leq 1$. Sea $\{x_n^*\} \subseteq S_{X^*}$ una sucesión tal que

$$\langle x_n^*, x_n \rangle = ||x_n|| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por (1.20) X^* es reflexivo y podemos suponer que $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ para algún $x^* \in X^*$. Sea i tal que

$$|x^*(x_i)| < \epsilon/2\,, \qquad ||x_n|| > 1 - \epsilon \quad \forall\, n \geq i$$

Para $j > i$ lo suficientemente grande

$$|(x_j^* - x^*)(x_i)| < \epsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |x_i^*(x_j)| < \epsilon$$

Entonces $|x_j^*(x_i)| < \epsilon$ y para todo $\tau \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\rho_X(\tau) \geq & \frac{1}{2}(||x_i - x_j + \tau x_i|| + ||x_i - x_j - \tau x_i||) - 1 \\ \geq & \frac{1}{2}(|x_i^*((1+\tau)x_i - x_j)| + |x_j^*(x_j - (1-\tau)x_i)|) - 1 \\ \geq & \frac{1}{2}((1+\tau)(1-\epsilon) - \epsilon + 1 - \epsilon - (1-\tau)\epsilon - 1 = \tau/2 - 2\epsilon\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario $\rho_X(\tau) \geq \tau/2$, lo que contradice la hipótesis del Teorema. □

Teorema 1.29. *Sea X un espacio NUC, entonces tiene NS.*

Demostración. Supongamos que X no tiene NS, entonces existe una sucesión diametral $\{x_n\} \in B_X$ con $\operatorname{diam}\{x_n\} = 1$. Dado que los espacios NUC son reflexivos, podemos suponer que $w - \operatorname{lím}_n x_n = 0$ y que $\operatorname{sep}\{x_n\} > \epsilon$. Ahora

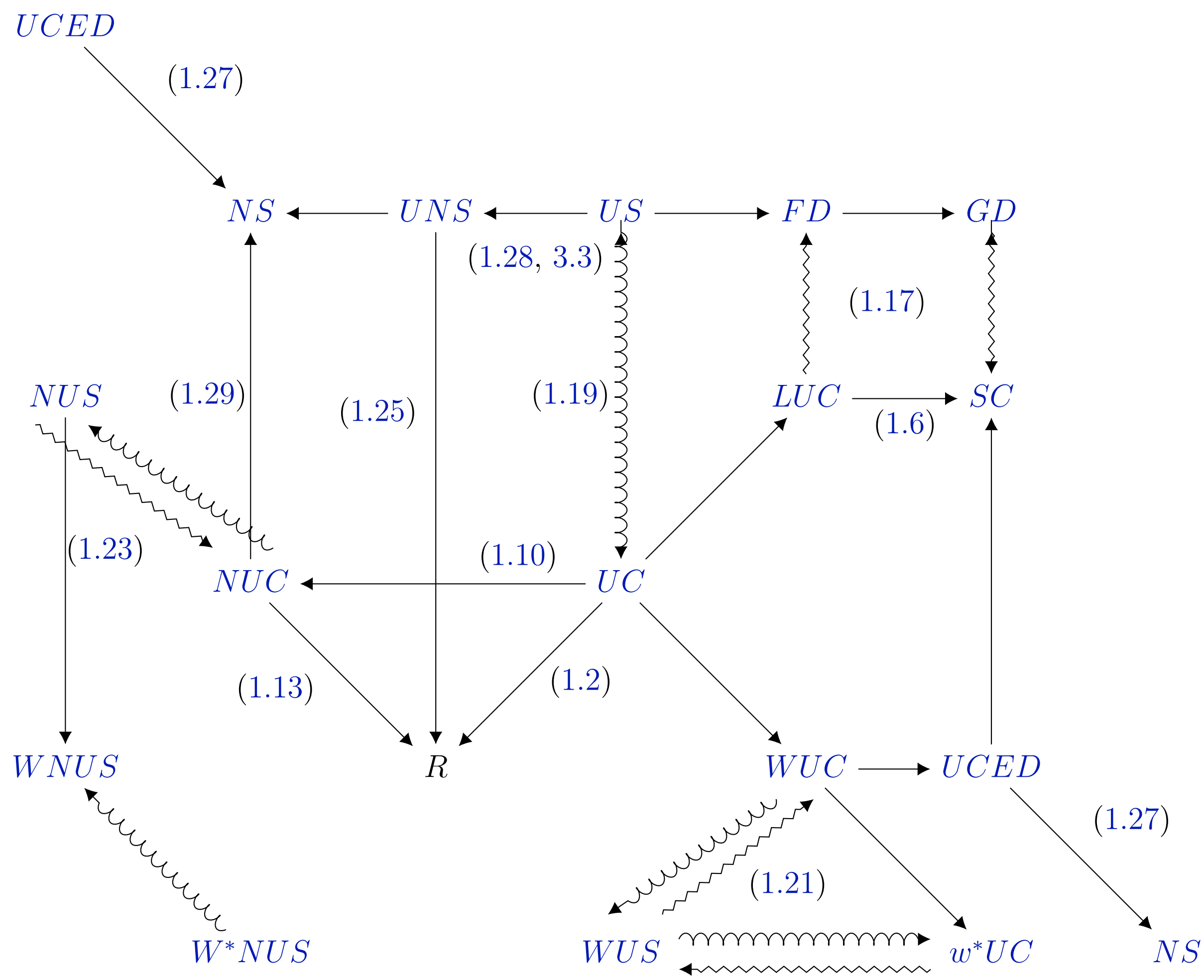
$$\operatorname*{lím}_n d(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}) = \operatorname*{lím}_n d(0, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\})$$

Pero por NUC, existe $\delta > 0$ tal que

$$\operatorname*{lím}_n d(0, \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}) < 1 - \delta$$

lo que contradice que la sucesión sea diametral. □

Resumiremos los resultados de este capítulo en el siguiente diagrama de relaciones. Este es un gran mapa caracterizando diversas propiedades geométricas de los espacios de Banach. Tal diagrama pretende ser una ilustración completa de las relaciones descritas en esta tesis. En general ninguna flecha extra puede dibujarse sin el uso de hipótesis adicionales. Ponemos referencia a las proposiciones o teoremas que demuestran las implicaciones descritas.



Notas: Diagrama de implicaciones de propiedades geométricas. (R) se refiere a espacios reflexivos.

$(A) \longrightarrow (B)$	:	Espacios con la propiedad (A) satisfacen (B)
$(A) \dashrightarrow (B)$	:	Espacios reflexivos con la propiedad (A) satisfacen (B)
$(A) \rightsquigarrow (B)$	:	Si el espacio satisface (A) entonces su dual satisface (B)
$(A) \rightsquigarrow (B)$	:	Si el espacio dual satisface (A) entonces el espacio satisface (B)

Capítulo 2

Teoría del Punto Fijo

En este capítulo estudiaremos la propiedad del punto fijo. Investigaremos las condiciones que el espacio debe satisfacer para garantizar la existencia de puntos fijos para operadores continuos. Comenzamos con dos Teoremas que nos hablan sobre la existencia de puntos fijos, los cuales pueden ser considerados como pilares de la Teoría del punto fijo. La segunda parte de este capítulo tratará de generalizar las condiciones para garantizar existencia de puntos fijos. Por ejemplo, trataremos de relajar la hipótesis de contracción en el Teorema de Banach (2.1) para incluir una familia más amplia de operadores. En este sentido el Teorema de Schauder (2.4) logra este propósito, sin embargo debemos imponer estructura de compacidad en el espacio, lo cual resulta ser muy restrictiva. Así, buscaremos 'intermedios' entre estos dos resultados para establecer existencia de puntos fijos.

2.1. Teoremas de Banach y Schauder

El siguiente teorema puede considerarse como el pilar, al menos fundacional, en la Teoría métrica del punto fijo, y ha encontrado vastas aplicaciones en diversas áreas, como lo son la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, el famoso Teorema de Lindelöf-Picard y otros.

Sea X un espacio de Banach, diremos que el mapeo $T : X \longmapsto X$ tiene un *punto fijo* si existe $x^* \in X$ tal que $Tx^* = x^*$. Diremos que el mapeo T es una *contracción* si existe $0 < q < 1$ tal que para todo $x, y \in X$

$$||Tx - Ty|| \leq q\,||x - y||$$

Teorema 2.1 (Teorema de contracción de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si T es una contracción, entones existe un punto fijo único de T.*

Demostración. Primero demostramos la unicidad del punto fijo, en caso de que exista. Si x_1, x_2 fueran ambos puntos fijos, entonces

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) \leq qd(x_1, x_2)$$

lo cual es una contradicción ya que $q < 1$.

Para demostrar la existencia, escogemos un punto arbitrario $x_1 \in X$ y definimos las iteraciones $x_{n+1} = Tx_n = T^n x_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n \geq 3$ tenemos que

$$||x_{n+1} - x_n|| = ||Tx_n - Tx_{n-1}|| \leq q\, ||x_n - x_{n-1}|| \leq q^{n-1}\, ||x_2 - x_1||$$

Entonces para $n > m \in \mathbb{N}$,

$$||x_n - x_m|| \leq \sum_{i=m}^{n-1} ||x_i - x_{i+1}|| \leq \sum_{i=m}^{n-1} q^{i-1}\, ||x_2 - x_1|| \leq \frac{q^{m-1}}{1-q}\, ||x_2 - x_1||$$

De modo que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y por la completez del espacio, tiene un punto límite x^*. Finalmente, de la continuidad de T:

$$Tx^* = \lim_n Tx_n = \lim_n x_{n+1} = x^*$$

□

Es posible extender el Teorema de Banach a contextos más generales, al relajar alguno de los supuestos. Por ejemplo, el Teorema de Caristi nos dice que si en lugar de tener una contracción pedimos que $||x - Tx|| \leq f(x) - f(Tx)$ con f semicontinua, T tiene un punto fijo. El Teorema de Edelstein, relaja el supuesto de contracción a que el mapeo sea no-expansivo; sin embargo requiere que el dominio sea compacto, y en esta misma línea el Teorema de Schauder sólo pide la compacidad del dominio.

Antes de enunciar y probar el Teorema de Schauder, es útil estudiar la estructura de los conjuntos invariantes bajo un operador T.

Definición 2.1. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \longmapsto X$, un operador. Un subconjunto no vacío cerrado y convexo $D \subseteq X$ se dice T-*minimal invariante *si $TD \subseteq D$ y si D no contiene subconjuntos propios cerrados y convexos invariantes bajo T.*

El siguiente resultado nos habla sobre la estructura de los conjuntos invariantes bajo T. La demostración de este lema puede encontrarse en [DS58], pp.54.

Lema 2.2. *Sea K un subconjunto con interior no vacío compacto y convexo de un espacio de Banach X. Sea $T : K \longmapsto K$ continua. Si K contiene al menos dos puntos, entonces existe un subconjunto propio cerrado y convexo $K_1 \subset K$ tal que $TK_1 \subseteq K_1$.*

Contrastando o complementando el lema anterior tenemos el siguiente

Lema 2.3. *Sea K un subconjunto no vacío débilmente compacto y convexo de un espacio de Banach. Luego para todo mapeo $T : K \longmapsto K$, existe un subconjunto cerrado, convexo y minimal T-invariante de K.*

Demostración. Consideramos la familia $\mathcal{M}$ de todos los subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados (luego w-compactos[1]) y T-invariantes de K ordenados bajo inclusión. Por la compacidad débil, toda cadena tiene una cota inferior y por el lema de Zorn tiene un elemento minimal. □

Una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, convexos y T-invariantes se puede obtener tomando

$$K_0 = K \ ; \qquad K_{n+1} = \overline{\text{conv}} TK_n \ \ n = 0, 1 \dots$$

El conjunto $K_\infty = \cup_n K_n$ es cerrado, convexo y T-invariante. Notemos que si K es minimal entonces

$$K = \overline{\text{conv}} TK$$

Teorema 2.4 (Teorema de Schauder). *Sea $T : K \longmapsto K$ una función continua. Si K es un subconjunto convexo y compacto con interior no vacío de un espacio de Banach, entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración. Por el lema 2.3, existe un conjunto minimal T-invariante y por el lema 2.2 el conjunto minimal consiste de un sólo punto. □

Observación 2.1. *Un corolario del Teorema de Schauder es que todo mapeo afín que es isometría sobre un conjunto cerrado, convexo y w-compacto tiene un punto fijo.*

Finalizamos esta sección reconociendo la naturaleza 'separable' del problema del punto fijo. Sea K un conjunto cerrado, convexo e invariante bajo T; y $x_0 \in K$. Consideremos la sucesión

$$K_0 = \{x_0\} \ ; \qquad K_{n+1} = \overline{\text{conv}}(K_n \cup TK_n) \ \ n = 0, 1, \dots$$

Sea X_n el subespacio generado por K_n: $X_n = \overline{\text{span}} K_n$. Notemos que los conjuntos K_n son convexos y compactos y entonces X_n es separable; pues el generado cerrado de un compacto es separable:

Como K_n es compacto, entonces es separable y sea D un subconjunto denso numerable de K_n. Puesto que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, entonces $\text{span}\, D \subseteq \overline{\text{span}_{\mathbb{Q}} D}$, donde $\text{span}_{\mathbb{Q}}$ se refiere a las combinaciones lineales con escalares racionales.

Luego,

$$\overline{\text{span}_{\mathbb{Q}} D} = \overline{\text{span}\, D}$$

es un subespacio lineal cerrado conteniendo $D^- = K_n$, luego $\overline{\text{span}\, K_n} = X$. Pero $\text{span}_{\mathbb{Q}} D$ es numerable pues D y $\mathbb{Q}$ lo son, así que X_n es separable.

[1]Pues un conjunto cerrado y convexo es w-cerrado: Aplicando el Teorema de Hahn-Banach al conjunto cerrado, convexo C y con $A = \{x\}$ disjunto de C existe una funcional ϕ que separa a C de A proveyendo un conjunto débil abierto conteniendo a x y disjunto de C. Entonces C^c es débil abierto y por lo tanto C es débil cerrado.

Pongamos

$$K_\infty = \overline{\cup_n K_n} \quad \text{y} \quad X_\infty = \overline{\cup_n X_n}$$

Luego X_∞ es separable y K_∞ un subconjunto cerrado y convexo de X_∞ y T-invariante.

Notemos que si la estructura de K la podemos llevar a K_∞, entonces es suficiente con trabajar en un ambiente separable. Con esto en mente, la mayoría de los resultados los formulamos en tal contexto.

2.2. Geometría del espacio y TPF

Consideremos, en lo subsecuente, un espacio de Banach X y K un subconjunto cerrado, convexo y no vacío. Decimos que $T : K \longmapsto K$ es un operador no expansivo si

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$$

En el siguiente ejemplo es fácil notar que la prueba del Teorema de contracción de Banach no se cumple si $q = 1$.

Ejemplo 2.1. *Sea $T : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ definida por $Tx = \ln(1+e^x)$. T es contractivo: Para $x, y \in \mathbb{R}$, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (x, y)$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| = \frac{e^c}{1 + e^c}|x - y| < |x - y|$$

y además no tiene puntos fijos.

Definición 2.2 (FPP). *Diremos que X satisface la propiedad del punto fijo (FPP) si todo operador no expansivo sobre un cerrado, convexo y no vacío tiene un punto fijo.*

El objetivo principal de esta sección (y del resto de la tesis) es explorar qué espacios cumplen con FPP. Resaltaremos que FPP no sólo dependerá del espacio, sino de la topología subyacente (dada por la norma).

Sin ser en lo absoluto exhaustivos, damos tres ejemplos de espacios sin FPP.

Ejemplo 2.2. *Sea $X = \ell_1$ con la norma usual, $K = \overline{\text{conv}}\{e_n\}$ con $\{e_n\}$ los canónicos estándar. El operador* corrimiento lateral derecho $T : K \longmapsto K : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (0, x_1, \ldots)$, *no tiene puntos fijos.*

Ejemplo 2.3. *Sea $X = c_0$ con la norma usual, y $T : B_x \longmapsto B_x : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (1, x_1, \ldots)$ con B_x la bola unitaria cerrada. Claramente B_X es cerrado y convexo, y T es una isometría mapeando a la frontera de la bola y no tiene ningún punto fijo.*

Ejemplo 2.4. *Sea $X = \mathcal{C}[0,1]$ con la norma usual, y*

$$K = \{f \in X \mid 0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 1\}$$

$T : K \longmapsto K$ tal que $Tf(t) = tf(t)$. T no tiene puntos fijos.

A pesar de que los operadores no expansivos pueden no tener puntos fijos, siempre podemos garantizar la existencia de puntos fijos 'aproximados' en el sentido del siguiente teorema:

Teorema 2.5. *Sea T un operador no-expansivo sobre un conjunto cerrado convexo y acotado K. Entonces*

$$\inf_{x\in K}\{||Tx - x||\} = 0$$

Demostración. Fijemos $z \in K$ y $\epsilon > 0$. Consideremos el operador $T_\epsilon = (1-\epsilon)T + \epsilon z$. Es fácil ver que T_ϵ es una contracción y por el Teorema de Banach tiene un punto fijo x_ϵ. Luego

$$||Tx_\epsilon - x_\epsilon|| = ||\epsilon z + \epsilon Tx_\epsilon|| \leq \epsilon \operatorname{diam} K$$

y como ϵ es arbitrario, podemos concluir el resultado. □

Definición 2.3. *Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ sobre K tal que* $\lim_n ||Tx_n - x_n|| = 0$ *es casi un punto fijo y lo abreviaremos afps (por las siglas en inglés* almost fixed point sequence*).*

Notemos que la pregunta sobre si T tiene un punto fijo puede reducirse a que la función $\phi : K \longmapsto \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = ||Tx - x||$ alcance su mínimo. La respuesta claramente es afirmativa en el caso en el que K es compacto. Nos hacemos la misma pregunta añadiendo la hipótesis extra sobre K de compacidad débil. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.4 (w-FPP)**.** *Un espacio de Banach cumple con la propiedad débil del punto fijo (w-FPP) si todo operador no expansivo sobre un conjunto cerrado, convexo, w-compacto y no vacío tiene un punto fijo*

Podemos ver a la propiedad del punto fijo como una 'combinación' del Teorema de Banach (2.1) y el Teorema de Schauder (2.4). Puesto que la condición de compacidad en el Teorema de Schauder se toma respecto a la topología de la norma, podemos considerar otras topologías con la cual considerar la condición de compacidad, por ejemplo la topología débil estrella en el espacio dual.

Lema 2.6. *Sea K w-compacto y minimal invariante bajo T y $\alpha : K \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y semicontinua por debajo tal que $\alpha(Tx) \leq \alpha(x)$ para todo $x \in K$. Entonces α es constante.*

Demostración. Para todo $c \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in K \mid \alpha(x) \leq c\}$ es cerrado y convexo. Supongamos que α no es constante. Luego existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\emptyset \neq K_0 := \{x \in K \mid \alpha(x) \leq c\} \neq K$. Dado $x \in K_0$ tenemos que $\alpha(Tx) \leq \alpha(x) \leq c$, y entonces $Tx \in K_0$, por lo que K_0 es T-invariante. Esto contradice la minimalidad de K. □

Una de las herramientas principales en la Teoría del Punto Fijo, es lo que conocemos ahora como el *lema de Goebel-Karlovitz*, probado independientemente en [Goe75] y [Kar76].

Lema 2.7. *(Lema de Goebel-Karlovitz)*

Sea K un subconjunto w-compacto, cerrado, convexo y minimal bajo un operador no expansivo $T : K \longmapsto K$, entonces

(I) *Todo punto de K es diametral*

(II) *Para todo afps $\{x_n\}$ de T*

$$\lim_n ||x - x_n|| = \operatorname{diam}(K) \qquad \forall\, x \in K$$

Demostración. (I) La función $\phi : K \longmapsto \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \sup\{||x-y|| \mid y \in K\}$ es semi-continua por debajo y convexa. Afirmamos que $\phi(x) = \sup\{||x - Ty|| \mid y \in K\}$ para todo $x \in K$: Si para alguna $x \in K$ tenemos $d_0 := \sup\{||x - Ty|| \mid y \in K\} < \sup\{||x-y|| \mid y \in K\}$, el conjunto $K \cap B(x, d_0)$ es un subconjunto propio w-compacto y convexo T-invariante de K, lo cual es una contradicción. Entonces para $x \in K$

$$\phi(Tx) = \sup\{||Tx - Ty|| \mid y \in K\} \leq \sup\{||x-y|| \mid y \in K\} = \phi(x)$$

Del lema anterior (2.6) ϕ es una función constante, cuyo valor es $\operatorname{diam}(K)$.

(II) Sea $\{x_n\}$ un afps de T. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que K es separable[2]. Con un argumento diagonal, podemos seleccionar una subsucesión tal que $\phi(x) := \lim ||x - x_n||$ existe para todo $x \in K$. La afirmación es que tal límite toma el valor $\operatorname{diam}(K)$ para todo $x \in K$ (independiente de la sucesión $\{x_n\}$).

Sea $x \in K$, luego

$$\phi(Tx) = \lim ||Tx - x_n|| = \lim ||Tx - Tx_n|| \leq \lim ||x - x_n|| = \phi(x)$$

Como ϕ es ciertamente semi-continua por debajo y convexa, por el lema (2.6), ϕ es constante con $d = \phi(x) \leq \operatorname{diam}(K)$ para todo $x \in K$. Tomando otra subsucesión, podemos suponer que $\{x_n\}$ es w-convergente, digamos a $y \in K$. Luego $d := \lim ||x - x_n|| \geq ||x - y||$ para todo $x \in K$ y como y es un punto diametral por (I), entonces $d \geq \operatorname{diam}(K)$.

□

Finalmente discutimos la estructura convexa del conjunto de los afps.

[2] Ver la discusión al final de la sección anterior.

Teorema 2.8. *Sea K un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach y $T : K \longmapsto K$ un operador no expansivo. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ afps de T. Entonces para todo $0 < \alpha < 1$ existe un afps $\{z_n\}$ tal que*

$$\lim_n ||x_n - z_n|| = \alpha \lim_n ||x_n - y_n|| \qquad y \qquad \lim_n ||y_n - z_n|| = (1-\alpha) \lim_n ||x_n - y_n||$$

Demostración. Con el lema de Goebel-Karlovitz (2.7) y un argumento diagonal, podemos suponer que $\lim_n ||x_n - y_n|| = \operatorname{diam} K$.

Sea $\epsilon_n \longrightarrow 0$ tal que $\max(||Tx_n - x_n||, ||Ty_n - y_n||) < \epsilon_n^2$ y pongamos $w_n = (1-\alpha)x_n + \alpha y_n$. Entonces $T_n(z) = (1-\epsilon_n)T(z) + \epsilon_n w_n$ mapea K en sí mismo y tiene constante de Lispchitz igual a $1 - \epsilon_n$, por lo que tiene un punto fijo z_n, es decir,

$$z_n = (1-\epsilon_n)T(z_n) + \epsilon_n w_n$$

$$\Longrightarrow Tz_n - z_n = \epsilon_n(Tz_n - w_n) \longrightarrow 0$$

Concluimos que la sucesión z_n es un afps. Además

$$\begin{aligned} ||z_n - x_n|| =& ||(1-\epsilon_n)Tz_n + \epsilon_n w_n - x_n|| \\ \leq& (1-\epsilon_n)\left(||Tz_n - Tx_n|| + ||Tx_n - x_n||\right) + \epsilon_n ||w_n - x_n|| \\ \leq& (1-\epsilon_n)\left(||z_n - x_n|| + \epsilon_n^2\right) + \epsilon_n \alpha ||x_n - y_n|| \end{aligned}$$

y entonces $||z_n - x_n|| \leq \epsilon_n + \alpha ||x_n - y_n||$. Del mismo modo $||z_n - y_n|| \leq \epsilon_n + (1-\alpha) ||x_n - y_n||$. Para la otra desigualdad tenemos que

$$||x_n - y_n|| \leq ||x_n - z_n|| + ||z_n - y_n|| \leq ||x_n - z_n|| + \epsilon_n + (1-\alpha) ||x_n - y_n||$$

y entonces $\alpha ||x_n - y_n|| \leq \epsilon_n + ||x_n - z_n||$ y $(1-\alpha) ||x_n - y_n|| \leq \epsilon_n + ||y_n - z_n||$. $\square$

El siguiente resultado es quizás de los Teoremas más importantes en la Teoría del Punto Fijo.

Teorema 2.9. *Sea X un espacio con NS, entonces cumple con w-FPP*

Demostración. Sea $T : K \longmapsto K$ es un operador no expansivo sobre un subconjunto $K \subseteq X$, convexo, cerrado y w-compacto. Sea a su vez K_0 un subconjunto de K convexo, cerrado, w-compacto y minimal T-invariante. La parte (I) del lema de Goebel-Karlovitz (2.7) garantiza que todo punto de K_0 es diametral, pero por la estructura normal del espacio K_0 es un singulete, el punto fijo de T. $\square$

Observación 2.2. *Usar NS para establecer la existencia de puntos fijos no puede ser usada para espacios WUS, [JR07]. Sin embargo puede ser usada para espacios US, como ejemplifica el Teorema (1.28).*

Aunque la estructura normal resulta ser una herramienta poderosa para establecer puntos fijos, no todos los espacios cumplen con dicha propiedad. Por ejemplo, con $X = c_0$ con la norma usual $K = \overline{\text{conv}}\{e_i\}$, donde e_i son los vectores canónicos, tenemos que K es w-compacto y diametral con $\text{diam}(K) = 1$. Sin embargo, el siguiente Teorema debido a Maurey establece w-FPP para c_0.

Teorema 2.10. *Sea K un subconjunto de c_0 débilmente compacto, cerrado y convexo y T no-expansivo, entonces T tiene un punto fijo; es decir, c_0 tiene la propiedad débil del punto fijo.*

Demostración. Supongamos que T no tiene puntos fijos y que K es minimal invariante bajo T con $\operatorname{diam} K = 1$ y $0 \in K$. Sea x_n una afps, podemos suponer que $w - \text{lím}_n x_n = 0$. Por el lema de Goebel-Karlovitz (2.7), $\text{lím}_n ||x_n|| = 1$ y pasando nuevamente a una subsucesión $\text{lím}_n ||x_n - x_{n+1}|| = 1$ con los soportes de x_n esencialmente disjuntos. A partir de la estructura convexa de los afps, (Teorema (2.8)) existe un afps z_n tal que

$$\lim_n ||x_n - z_n|| = \lim_n ||x_{n+1} - z_n|| = 1/2$$

y por Goebel-Karlovitz $\text{lím}_n ||z_n|| = 1$. Esto nos conduce a una contradicción: escogiendo n y k tal que $||x_n - z_n||$, $||x_{n+1} - z_n|| < 5/8$ y $|z_n(k)| > 6/8$, entonces $|x_n(k)|$, $|x_{n+1}(k)| > 1/8$ y así x_n no tiene soporte esencialmente disjunto. □

Una pregunta que permaneció abierta durante largo tiempo fue si todo espacio goza de la propiedad débil del punto fijo (w-FPP). Alspach [Als81] dio un contraejemplo, demostrando que existe un mapa no expansivo en $\mathbb{L}_1$ sobre un débil-compacto sin puntos fijos. Sin embargo, esta pregunta permanece abierta si nos restringimos a espacios reflexivos.

Ejemplo 2.5 (Ejemplo de Alspach)**.** *Consideremos $K = \{f \in \mathbb{L}_1 \mid 0 \leq f \leq 2 \ , \ \int f d\mu = 1\}$. Del Teorema de Dunford-Pettis se concluye fácilmente que es w-compacto, pues es uniformemente integrable*[3]*.*

Sea $T : K \longmapsto K$ definida por

$$Tf(t) = \begin{cases} \text{mín}(2f(2t), 2) & t \in [0, 1/2] \\ \text{máx}(0, 2f(2t-2) - 2) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

T es una isometría:

$$\begin{aligned} ||Tf(t)|| &= \int_{[0,1/2]} f(2t) + 1 - |f(2t) - 1| dt \\ &\quad + \int_{(1/2,1]} f(2t-1) - 1 + |f(2t-1) - 1| dt \\ &= \int_{[0,1]} f(t) dt = ||f(t)|| \end{aligned}$$

[3]Recordemos integrabilidad uniforme: Un conjunto cerrado y convexo $M \subseteq \mathbb{L}_1$ es uniformemente integrable si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f| d\mu < \epsilon$ siempre que $\mu(A) < \delta$ y $f \in M$.

Supongamos que T tiene un punto fijo $f \in K$. De esta forma

$$\{t \mid f(t) = 2\} = \{t \mid Tf(t) = 2\}$$

$$=^{4} \left\{\frac{t}{2} \mid f(t) = 2\right\} \cup \left\{\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \mid f(t) = 2\right\} \cup \left\{\frac{t}{2} \mid 1 \leq f(t) < 2\right\}$$

Entonces $\left\{\frac{t}{2} \mid 1 \leq f(t) < 2\right\}$ tiene medida cero. Ahora,

$$\begin{aligned} B_1 :=& \{t \mid 1 \leq f(t) < 2\} = \{t \mid 1 \leq Tf(t) < 2\} \\ \supseteq& \{t \mid 1 \leq f(2t) + 1 - |f(2t) - 1| < 2\} = \{t \mid 0 \leq f(2t) - |f(2t) - 1| < 1\} \\ =& \left\{\frac{t}{2} \mid 1/2 \leq f(t) < 1\right\} \end{aligned}$$

y entonces $B_2 := \{t \mid 1/2 \leq f(t) < 1\}$ tiene medida cero e inductivamente $B_n := \{t \mid 2^{-n} \leq f(t) < 2^{-n+1}\}$ es nulo para todo $n \geq 0$. Así:

$$\{t \mid 0 < f(t) < 2\} = \bigcup_{n \geq 0} B_n$$

es nulo. De esta forma descubrimos que $f = 2\mathbb{1}(A)$ (casi dondequiera) para algún conjunto A con medida $1/2$. De la definición de T

$$T2\mathbb{1}(A) = 2\mathbb{1}(\frac{A}{2}) + 2\mathbb{1}(\frac{A}{2} + \frac{1}{2})$$

y entonces casi dondequiera

$$A = \frac{A}{2} \cup \left\{\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\right\}$$

---

[4] De la definición de T, si $t \in [0, 1/2]$

$$\begin{aligned} \{t \mid Tf(t) = 2\} =& \{t \mid f(2t) - 1 - |f(2t) - 1| = 2\} = \{t \mid f(2t) - 1 = |f(2t) - 1|\} \\ =& \{t \mid f(2t) - 1 \geq 0\} \cup \{t \mid 2f(2t) = 2\} \\ =& \{t \mid f(2t) \geq 1\} = \left\{\frac{t}{2} \mid 2 \geq f(t) \geq 1\right\} \\ =& \left\{\frac{t}{2} \mid 2 > f(2t) \geq 1\right\} \cup \left\{\frac{t}{2} \mid f(2t) = 2\right\} \end{aligned}$$

y si $t \in (1/2, 1]$

$$\begin{aligned} \{t \mid Tf(t) = 2\} =& \{t \mid f(2t - 1) - 1 + |f(2t - 1) - 1| = 2\} \\ =& \{t \mid f(2t - 1) + |f(2t - 1) - 1| = 3\} \\ =& \{t \mid 2f(2t - 1) = 4\} \\ =& \left\{\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \mid f(t) = 2\right\} \end{aligned}$$

Iterando el operador T:

$$\begin{aligned}
A =& \frac{A}{4} \cup \left\{ \frac{A}{4} + \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{4} + \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{4} + \frac{3}{4} \right\} \\
=& \frac{A}{8} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{1}{8} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{3}{8} \right\} \\
& \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{5}{8} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{3}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{A}{8} + \frac{7}{8} \right\} \\
=& \dots
\end{aligned}$$

Por lo que la intersección de cualquier intervalo diádico $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ con A tiene medida $\frac{1}{2^{n+1}}$, pero esto contradice el Teorema de Densidad de Lebesgue[5]

No obstante el resultado un tanto negativo de Alspach, tenemos el siguiente sorprendente resultado de Maurey, dando esperanza a la equivalencia entre w-FPP y reflexividad.

Teorema 2.11 ([Mau81])**.** *Todo subespacio reflexivo $\mathcal{R}$ de $\mathbb{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ satisface w-FPP.*

Demostración. [6] Sea K un subconjunto convexo, w-compacto de $\mathcal{R}$ y $T : K \longmapsto K$ un operador no expansivo. Supongamos que K es minimal invariante y contenido en la bola unitaria de $\mathbb{L}_1$ con $\operatorname{diam}(K) = 1$. Fijemos un conjunto denso D sobre K. Pongamos

$$v(t) := \sup\{y(t) \mid y \in D\} \qquad u(t) := \inf\{y(t) \mid y \in D\}$$

y entonces $u \leq x \leq v$ para todo $x \in K$.

Sea $\{x_n\}$ un afps de T. Afirmamos que para todo t los únicos puntos de acumulación de $\{x_n(t)\}$ son $u(t)$ y $v(t)$. Fijemos $x, y \in D$. Por el lema de Goebel-Karlovitz (2.7) aplicado a la sucesión $\{x_n\}$ y los puntos $x, y, (x+y)/2 \in K$ obtenemos

$$\lim_n \int (|x_n - x| + |x_n - y| - 2|x_n - (x+y)/2|) = \lim_n (||x_n - x|| + ||x_n - y|| - 2\,||x_n - (x+y)/2||) = 0$$

[5] Sea A un conjunto Lebesgue medible. Definimos la *densidad aproximada* de A en una ϵ-vecindad del punto $x \in \mathbb{R}$ por

$$d_\varepsilon(x) = \frac{\mu(A \cap B_\varepsilon(x))}{\mu(B_\varepsilon(x))}$$

El Teorema de densidad de Lebesgue afirma que para casi todo punto $x \in A$, la densidad

$$d(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(x)$$

existe y es igual a 1.

[6] Con el fin de no oscurecer los argumentos omitiremos el 'adjetivo' *casi dondequiera*. Es importante resaltar que la prueba original de Maurey sigue construcciones no-estándar. Seguimos en esta demostración las ideas de [ELOS83].

Como los integrandos son no-negativos, pasando a una subsucesión y con ayuda del Teorema de Convergencia Monótona, tenemos que

$$|x_n - x| + |x_n - y| - 2|x_n - (x+y)/2| \longrightarrow 0$$

Como D es numerable, existe un conjunto A con $\mu(A) = 1$ tal que

$$|x_n(t) - x(t)| + |x_n(t) - y(t)| - |2x_n(t) - (x(t) + y(t))| \longrightarrow 0$$

para toda $t \in A$ y todo $x, y \in D$. Fijemos una $t \in A$, y sea $\alpha(t)$ un punto de acumulación de $(x_n(t))$. Luego

$$|\alpha(t) - x(t)| + |\alpha(t) - y(t)| = |2\alpha(t) - (x(t) + y(t))| \quad \forall\, x, y \in D$$

Entonces, $\alpha(t) - x(t)$ y $\alpha(t) - y(t)$ llevan el mismo signo. Como x, y son arbitrarios $\alpha(t)$ coincide con $u(t)$ o $v(t)$.

Ahora probaremos que u y v son finitas (casi dondequiera). Fijemos $I = \{t \in \Omega \mid v(t) = +\infty\}$, y sea $\{x_n\}$ un afps de T. Como K está contenido en la bola unitaria de $\mathbb{L}_1$

$$\mu\{t \in \Omega \mid |x(t)| > 2^n\} < 2^{-n} \qquad \forall\, x \in K\ , n \in \mathbb{N}$$

Como $v(t)$ es el único punto de acumulación no-negativo de $\{x_n(t)\}$ tenemos que

$$\lim_n \mu\{t \in I \mid 1 \leq x_n(t) \leq 2^m\} = 0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

y al pasar a una subsucesión que

$$\mu\{t \in I \mid 1 \leq x_n(t) \leq 2^n\} < 2^{-n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Junto con la primera estimación llegamos a que $\mu\{t \in I \mid 1 \leq x_n(t)\} < 2^{-n+1}$. Por el lema de Borel-Cantelli, $x_n(t) > 1$ un número finito de veces para casi todo $t \in I$. Entonces $\mu(I) = 0$.

Fijemos N. Afirmamos que existen N funciones $\{h^i\}$ sobre $\mathcal{R}$ y N conjuntos disjuntos $\{C^i\}$ tales que

$$\int_{C^i} |h^i| \geq 3\left|\left|h^i\right|\right|/4 \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N$$

Esto nos conduce a una contradicción, pues la medida de al menos uno de los conjuntos C^i tiene que ser menor a $1/N$. Entonces la familia $\{h^i\}$ ni la bola unitaria son uniformemente integrables, y por el Teorema de Dunford-Pettis no son w-compactos, pero esto contradice el hecho de que el espacio $\mathcal{R}$ es reflexivo.

Construimos dicha familia de funciones $\{h^i\}$. Sea $\{x_n\}$ un afps. Por el lema de Goebel-Karlovitz y un argumento diagonal es posible pasar a una subsucesión de $\{x_n\}$ denotada por $\{y_n\}$ tal que $\lim_n ||x_n - y_n|| = 1$, y $\{y_n\}$ constituye un afps de T. Sea $x_n^0 = x_n$ y $x_n^N = y_n$ y usamos la convexidad métrica del conjunto de los afps (Teorema 2.8) para obtener los afps $\{x_n^i\}$ para $i = 1, \ldots, N-1$ tales que $\lim_n ||x_n^i - x_n^j|| = |i-j|/N$ para todo $0 \leq i, j \leq N$. Para n suficientemente grande

$$\left|\left|x_n^i - x_n^{i-1}\right|\right| \leq (1+\epsilon)/N \qquad y \qquad \left|\left|x_n^N - x_n^0\right|\right| \geq 1-\epsilon$$

para todo $i = 1, \ldots, N$.

Fijemos $\epsilon > 0$. De la integrabilidad uniforme de la bola unitaria (pues es w-compacta) existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |h| < \epsilon\, ||h||$ para todo $h \in \mathcal{R}$ y con $\mu(E) < \delta$. Como los únicos puntos de acumulación para los afps $\{x_n^i\}$ son u y v, los puntos de acumulación de $|x_n^i - x_n^j|$ son $v-u$ y 0. Luego existen un conjunto A con $\mu(A) > 1-\delta$ y subconjuntos (B_i) con $i = 1, \ldots, N$ y B tales que

$$||x_n^i - x_n^{i-1}| - (u-v)| < \epsilon \quad \text{sobre } B_i \quad \text{y} \quad |x_n^i - x_n^{i-1}| < \epsilon \quad \text{sobre } A \setminus B_i$$

y similarmente

$$||x_n^0 - x_n^N| - (u-v)| < \epsilon \quad \text{sobre } B \quad \text{y} \quad |x_n^0 - x_n^N| < \epsilon \quad \text{sobre } A \setminus B$$

Sea $h^i = x_n^i - x_n^{i-1}$, $h = x_n^N - x_n^0$ y $g = v - u$. Luego

$$\left|\left|h^i\right|\right| \leq (1+\epsilon)/N \qquad ||h|| \geq 1-\epsilon \qquad h = \sum h^i$$

$$|g - |h^i|| < \epsilon \quad \text{sobre } B_i \quad , \quad |h^i| < \epsilon \quad \text{sobre } A \setminus B_i \quad \text{y} \int_{\Omega \setminus B} |h^i| < \epsilon$$

y

$$|g - |h|| < \epsilon \quad \text{sobre } B \quad , \quad |h| < \epsilon \quad \text{sobre } A \setminus B \quad \text{y} \int_{\Omega \setminus B} |h| < \epsilon$$

De las estimaciones anteriores llegamos a que

$$\int_B g \geq \int_B |h| - \epsilon = ||h|| - \int_{\Omega \setminus A} |h| - \int_{A - \setminus B} |h| - \epsilon \geq 1 - 4\epsilon$$

y

$$\sum \int_{B_i} g \leq N\epsilon + \sum \int_{B_i} |h^i| \leq N\epsilon + \sum \left|\left|h^i\right|\right| \leq 1 + (N+1)\epsilon$$

Notemos que si $t \in B$ y $|h(t)| \geq N\epsilon$, como $h(t) = \sum h^i(t)$ existe i tal que $|h^i(t)| \geq \epsilon$, es decir que $t \in B_i$. Así que $|h| < N\epsilon$ sobre $B \setminus \cup B_i$ y

$$\int_{B \setminus \cup B_i} g \leq \epsilon + \int_{B \setminus \cup B_i} |h| \leq (N+1)\epsilon$$

Finalmente poniendo

$$W = \{t \mid t \text{ pertenece a al menos dos } B_i\}$$

entonces

$$\int_W g \leq \sum \int_{B_i} g - \int_{\cup B_i} g \leq \sum \int_{B_i} g - \int_B g + \int_{B \setminus \cup B_i} g \leq (2N+6)\epsilon$$

Los conjuntos disjuntos son $C^i = B_i \setminus W$ y por último

$$\begin{aligned}\int_{C^i} |h^i| &\geq \left|\left|h^i\right|\right| - \int_{\Omega \setminus A} |h^i| - \int_{A \setminus B_i} |hi| - \int_{W \cap B_i} g - \int_{W \cap B_i} |g - |h^i|| \\ &\geq \left|\left|h^i\right|\right| - (2N+9)\epsilon > 3\left|\left|h^i\right|\right|/4\end{aligned}$$

□

Observación 2.3. *Es importante que notemos que las demostraciones anteriores, aunque no usan directamente el lenguaje de ultraproductos (Capítulo 3) siguen la estructura de dicho espacio. Por ejemplo, en la demostración del Teorema (2.10) se usa la estructura de retícula de c_0 y la convexidad métrica del conjunto de afps - propiedades que inmediatamente escalan a su contexto de ultrapotencia. En [ELOS83] y [Bes93] se siguen las ideas de Maurey sin usar el lenguaje de ultraproductos. Más aún en [Bes93] se extienden los resultados del Teorema (2.11) para subconjuntos de $\mathbb{L}_1(E)$ y $c_o(E)$ donde E es UC.*

En contraste con el Teorema (2.11), y en línea con el ejemplo de Alspach, en [DL97] se nota que si $Y \subseteq \mathbb{L}_1$ es no-reflexivo, entonces existe un conjunto cerrado, acotado y convexo de Y y un mapa no-expansivo T sin puntos fijos. Como lo notan en su artículo, esto combinado con el Teorema de Maurey (2.11) nos dice que subespacios $Y \subseteq \mathbb{L}_1$ son reflexivos si y sólo si tienen la propiedad del punto fijo.

Esto nos obliga a preguntarnos sobre la relación entre reflexividad y FPP. Es un problema abierto si reflexividad implica FPP o el converso. Una de las aportaciones principales de esta tesis se enfocan en tratar de aproximarse a la respuesta.

Capítulo 3

Métodos no-estándar

El ejemplo de Alspach nos hace ver que es necesario otro supuesto además de la compacidad débil para establecer FPP y al mismo tiempo preparó el terreno para el sorprendente resultado de Maurey. Las limitaciones puramente geométricas en el desarrollo de la Teoría del Punto Fijo han empujado a buscar métodos más imaginativos. A partir del artículo fundamental de Maurey, el uso de estas técnicas en la Teoría del Punto Fijo han producido diversos teoremas; incluso cuando técnicas estándares están a la disposición, el enfoque es menos intuitivo. En su demostración original Maurey, empleó métodos no-constructivos involucrando nociones no-estándares como los ultraproductos de Banach. Estos métodos nacieron en la rama de la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Modelos, sin embargo, probaron ser útiles en otras áreas como Álgebra y Análisis.

En este capítulo introducimos la construcción no-estándar, a decir los ultraproductos de Banach y establecemos las propiedades elementales de estos así como su relación con la geometría del espacio original.

3.1. Ultraproductos de Banach

Consideremos una familia de espacios de Banach $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ donde $\mathcal{I}$ es un conjunto índice cualquiera no vacío. Consideremos

$$\ell_\infty(X_i) := \left\{ (x_i) \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \;\mid\; ||(x_i)||_\infty := \sup ||x_i||_{X_i} < \infty \right\}$$

Así, $\ell_\infty(X_i)$ es un espacio de Banach con la norma $\sup ||x_i||_{X_i}$ y las operaciones naturales de multiplicación por escalar y suma componente a componente.

Sea $\mathcal{U}$ un *ultrafiltro*[1] sobre $\mathcal{I}$, definamos $N : \ell_\infty(X_i) \longmapsto \mathbb{R}$ como $N(x_i) = \text{lím}_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i}$

[1] Sea I un conjunto no vacío. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es una colección de subconjuntos de I que satisfacen:

donde $\lim_{\mathcal{U}}$ denota al ultralímite[2] con respecto a $\mathcal{U}$. N es una función bien definida, pues el límite siempre existe: En efecto, tomemos $(x_i) \in \ell_\infty(X_i)$ y entonces $\sup ||x_i||_{X_i} = M < \infty$, de modo que para todo i, $||x_i||_{X_i} \in [0, M]$, un espacio de Hausdorff compacto, y es sabido que todo límite sobre un ultrafiltro es convergente en un espacio compacto.

Más aún N es continua: considerando una sucesión $(x_n) \subseteq \ell_\infty(X_i)$ tal que $||(x_n) - (x)||_\infty \longrightarrow 0$ entonces,

$$|N(x_n) - N(x)| = \lim_{\mathcal{U}} |\, ||x_n||_{X_i} - ||x||_{X_i} \,| \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_n - x||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||(x_n) - (x)||_\infty$$

de modo que $\lim_n |N(x_n) - N(x)| \leq \lim_n \lim_{\mathcal{U}} ||(x_n) - (x)||_\infty = 0$.

Con lo anterior en mente, pongamos

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}} := \{(x_i) \in \ell_\infty(X_i) \mid N(x_i) = 0\}$$

un subespacio lineal y cerrado de $\ell_\infty(X_i)$.

Definición 3.1 (Ultraproducto de Banach)**.** *El ultraproducto de una familia de espacios de Banach $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ respecto a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{I}$ es el espacio cociente $\ell_\infty(X_i)/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ y lo denotamos por $(X_i)_{\mathcal{U}}$ o por $\widetilde{X_i}$. Si todos los factores (X_i) son iguales, nos referimos a la* ultrapotencia de Banach*.*

Recordemos que el espacio cociente entre espacios de Banach resulta en un espacio de Banach con la norma cociente

$$||\widetilde{x_i}||_{X_{\mathcal{U}}} := \inf\{||(x_i) - (y_i)||_\infty \mid (y_i) \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}\}$$

donde $\widetilde{x_i}$ es cualquier representante de su clase.

Observación 3.1. *(I) Notemos que si $\mathcal{U}$ es trivial entonces el ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es isométrico-isomorfo a algún X_{i_0}. Consecuentemente sólo consideraremos ultrafiltros no-triviales.*

(II) Existe una inmersión natural de un espacio X en su ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$, definida por $J : X \longmapsto X_{\mathcal{U}} : x \longmapsto (x_i)_{\mathcal{U}}$ donde $x_i = x$ para todo $i \in \mathcal{I}$.

1. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$

Los ultrafiltros son elementos maximales de

$$P = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro sobre } I\ , \mathcal{F} \neq 2^I\}$$

[2] Decimos que $\lim_{\mathcal{U}}(x_i) = x$ si para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $\{i \in \mathcal{I} \mid ||x - x_i|| < \epsilon\}$ es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$.

(III) *Puesto que la bola unitaria en espacios de dimensión infinita no es compacta*[3]*, la construcción de ultraprotencia sólo tiene sentido en espacios infinito-dimensionales. En otro caso $X_\mathcal{U} \cong X$, puesto que todo $(x_i)_\mathcal{U} \in X_\mathcal{U}$ cumple que $||x_i||_{X_i} < M$ y la bola con radio M es compacta en X por lo que $\lim_\mathcal{U} x_i = x \in X$ y entonces $(x_i)_\mathcal{U} = (x)_\mathcal{U}$ así que la immersión diagonal es un isomorfismo.*

De forma intuitiva, la construcción de ultraproducto colapsa todas las sucesiones 'nulas' respecto al ultrafiltro a cero y entonces los distintos límites producen las clases de representantes. Aunque la explicación anterior carece de rigurosidad, el siguiente lema aporta los detalles necesarios.

Lema 3.1. *Para todo $\widetilde{x_i} \in (X_i)_\mathcal{U}$*

$$||\widetilde{x_i}||_{X_\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i}$$

Demostración. Sea $\widetilde{x_i} = (x_i) \in (X_i)_\mathcal{U}$ un representante tal que

$$\lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i - y_i||_{X_i} \leq ||(x_i) - (y_i)||_\infty$$

para todo $(y_i) \in \mathcal{N}_\mathcal{U}$. Tomando ínfimo obtenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} \leq ||x_i||_\mathcal{U}$$

Para la otra desigualdad, con $\epsilon > 0$ ponemos

$$\mathcal{I}_\epsilon := \{i \in \mathcal{I} \mid \ ||x_i||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} + \epsilon\}$$

una ϵ-vecindad del ultralímite y por lo tanto $\mathcal{I}_\epsilon \in \mathcal{U}$.

Sea ahora (y_i) como sigue

$$y_i = \begin{cases} x_i & i \notin \mathcal{I}_\epsilon \\ 0 & i \in \mathcal{I}_\epsilon \end{cases}$$

y es fácil ver que $\{i \in \mathcal{I} \mid y_i = 0\} \supseteq \mathcal{I}_\epsilon \in \mathcal{U}$ por lo que $(y_i) \in \mathcal{N}_\mathcal{U}$ y entonces $x_i - y_i$ es un representante de $\widetilde{x_i}$. Entonces

$$||\widetilde{x_i}||_{X_\mathcal{U}} \leq ||x_i - y_i||_\infty = \sup_{i \in \mathcal{I}} ||x_i - y_i||_{X_i} = \sup_{i \in \mathcal{I}_\epsilon} ||x_i||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} + \epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario podemos concluir la demostración. □

Esta última propiedad resulta ser crucial, pues cualquier noción que pueda ser expresada en términos de normas y que sea compartida por todos los espacios X_i será 'transportada' al ultraproducto $(X_i)_\mathcal{U}$, esto incluye las nociones de convexidad y suavidad.

La conexión entre un espacio y su ultrapotencia se analizará con más cuidado en la siguiente sección. Sin adelantarnos mucho, sólo diremos que la estructura local de la ultrapotencia nos arrojará información valiosa sobre la estructura del espacio.

[3] Por el *lema de Riesz*

3.2. Geometría de los espacios de Banach y métodos no-estándar

En esta sección combinamos las nociones geométricas con las construcciones no-estándar. Establecemos las propiedades geométricas sobre conjuntos minimales y mapeos no expansivos en la ultrapotencia.

Como discutimos, las propiedades gobernadas por los espacios finito-dimensionales de X son heredadas por $(X)_{\mathcal{U}}$[4]. Como los módulos de convexidad y suavidad tienen 'carácter de dimensión finita' por los resultados (1.1) y (1.18); entonces

$$\delta_{(X)_{\mathcal{U}}}(\cdot) = \delta_X(\cdot) \qquad \text{y} \qquad \rho_{(X)_{\mathcal{U}}}(\cdot) = \rho_X(\cdot)$$

De este modo las propiedades geométricas 'escalan' a la construcción de ultraproducto. Es importante notar que aunque las propiedades del espacio X escalan a su ultrapotencia, el converso en general no es cierto.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no-trivial sobre $\mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(I) $(X)_{\mathcal{U}}$ es SC

(II) $(X)_{\mathcal{U}}$ es UC

(III) X es UC

Demostración. Que (III) implica (II) se sigue de la relación de los módulos de convexidad y suavidad entre el espacio y su ultrapotencia. Que (II) implica (I) es directo, por lo que establecemos $(I) \longrightarrow (III)$.

Supongamos que X no es UC. Entonces existe $\epsilon > 0$ y sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq B_X$ tal que $||x_n + y_n|| \longrightarrow 2$ y $||x_n - y_n|| \geq \epsilon$.

Sean $x = (x_n)_{\mathcal{U}}$ y $y = (y_n)_{\mathcal{U}}$ en $(X)_{\mathcal{U}}$. Entonces

$$||x|| \leq 1 \;, \qquad ||y|| \leq 1 \;, \qquad ||x - y|| \geq \epsilon \quad \text{y} \quad ||x + y|| = 2$$

esto contradice la convexidad estricta de $(X)_{\mathcal{U}}$. □

En cierto sentido el ultraproducto nos devuelve la 'uniformidad'. Otro ejemplo de esta afirmación viene en el siguiente resultado. Recordemos del Teorema (1.28) que si $\rho'_X(0) < 1/2$, entonces X tiene NS, con ayuda de las construcciones de éste capítulo podemos reforzar el resultado:

[4] Rigurosamente tenemos que la ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en X, e intuitivamente esto nos dice que la estructura local de $(X)_{\mathcal{U}}$ (sus subespacios de dimensión finita) son como X.

Teorema 3.3. *Sea X con $\rho'_X(0) < 1/2$, entonces X tiene UNS.*

Demostración. Sabemos que X es NS. Supongamos que no es uniforme, luego existe una sucesión (K_n) de subconjuntos cerrados, convexos y acotados de X cada uno conteniendo al 0 y con diámetro 1 con $\lim_n r(K_n) = 1$ donde $r(\cdot)$ denota al radio de Chebyshev (1.6). Consideremos el conjunto $K = (K_i)_{\mathcal{U}} \subseteq (X)_{\mathcal{U}}$. Entonces K es cerrado y convexo en $(X)_{\mathcal{U}}$ con $\operatorname{diam} K = 1$. Puesto que $\lim_n r(K_n) = 1$ existen $x, y \in (K)_{\mathcal{U}}$ tal que

$$\lim_n ||x_i - y_i|| = ||x - y||_{\mathcal{U}} = 1$$

y por lo tanto K es diametral. Como $\rho'_X(0) = \rho'_{(X)_{\mathcal{U}}}(0) < 1/2$, $(X)_{\mathcal{U}}$ tiene NS, lo cual es una contradicción. $\square$

La siguiente construcción es la base de los métodos no estándar en la Teoría del Punto Fijo. Consideremos K un conjunto no-vacío, débilmente compacto, convexo y minimal T-invariante. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\operatorname{diam} K = 1$ y $0 \in K$. Sea

$$\widetilde{K} = (K)_{\mathcal{U}} := \{\widetilde{x} = ((x_i))_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}} \mid x_i \in K\ , i \in \mathbb{N}\}$$

Del mismo modo extendemos el mapeo $T : K \longmapsto K$ a un mapeo no-expansivo $\widetilde{T} : \widetilde{K} \longmapsto \widetilde{K}$ como

$$\widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{(Tx)} = (Tx_i)_{\mathcal{U}}$$

Notemos que $\widetilde{K}$ es acotado, cerrado y convexo e invariante bajo $\widetilde{T}$. No obstante no es minimal, pues si x_n es una sucesión afps en K, entonces $\widetilde{x} = (x_n)_{\mathcal{U}}$ es un punto fijo pues

$$\left|\left|\widetilde{T}\widetilde{x} - \widetilde{x}\right|\right|_{\mathcal{U}} = \lim_n ||Tx_n - x_n|| = 0$$

Recíprocamente, si $\widetilde{x} \in \operatorname{Fix}(\widetilde{T}) := \{\widetilde{x} \in \widetilde{K} \mid \widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{x}\}$ podemos extraer una subsucesión de $\widetilde{x} = (x_n)$ que es un afps de T.

Del mismo modo que el lema de Goebel-Karlovitz (2.7) es una herramienta principal para establecer la existencia de puntos fijos, el siguiente resultado de Lin en el lenguaje de ultraproductos es básico para ayudar a establecer la propiedad del punto fijo.

Teorema 3.4 (Lema de Lin)**.** *Sea K un subconjunto de un espacio de Banach y $(\widetilde{x_n})$ una sucesión afps de $\widetilde{T} : \widetilde{K} \longmapsto \widetilde{K}$. Entonces para toda $x \in K$*

$$\lim_n ||\widetilde{x_n} - x||_{\mathcal{U}} = \operatorname{diam} K$$

Demostración. Sea $(\widetilde{x_n})$ una afps para $\widetilde{T}$ en $\widetilde{K}$ y $x \in K$. Es suficiente demostrar que $\operatorname{diam} K$ es el único punto de acumulación de $||\widetilde{x_n} - x||_{\mathcal{U}}$. Sea entonces, $\lim_n ||\widetilde{x_n} - x||_{\mathcal{U}} = d$, $\delta_n = \left|\left|\widetilde{x_n} - \widetilde{T}\widetilde{x_n}\right|\right|_{\mathcal{U}}$ y ϵ_k tal que $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$. Sea $\widetilde{x_n} = \widetilde{(x_n^m)}$ y definamos

$$A_k = \{m \in \mathbb{N} \mid \ ||x_n^m - x|| \leq d + \epsilon_k \ \ y \ \ ||x_n^m - Tx_n^m|| \leq \epsilon + \delta_n\}$$

La idea ahora es extraer una afps de T para aplicar el lema de Goebel-Karlovitz. Notemos que para n lo suficientemente grande $A_k \in \mathcal{U}$ y es posible construir sucesiones estrictamente crecientes $(n(k))$ y $(m(k))$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\left|x_{n(k)}^{m(k)} - x\right|\right| \leq d + \epsilon_k \qquad \left|\left|x_{n(k)}^{m(k)} - Tx_{n(k)}^{m(k)}\right|\right| \leq \epsilon_k + \delta_{n(k)}$$

Notemos que de este modo $(x_{n(k)}^{m(k)})$ es una afps de T y por el lema de Goebel-Karlovitz (2.7),

$$\lim_k \left|\left|x_{n(k)}^{m(k)} - x\right|\right| = \operatorname{diam} K \leq d$$

Finalmente

$$\begin{aligned} d \leq \operatorname{diam} \widetilde{K} &= \sup\{||\widetilde{x} - \widetilde{y}||_{\mathcal{U}} \mid \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{K}\} \\ &= \sup\{\lim_n ||x_n - y_n|| \mid (x_n), (y_n) \in K\} \\ &\leq \sup\{\lim_n \operatorname{diam} K\} = \operatorname{diam} K \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

□

El siguiente corolario ayudará a fijar una estrategia para establecer la propiedad del punto fijo.

Corolario 3.5. *Sea $\widetilde{W}$ un subconjunto no vacío cerrado, convexo de $\widetilde{K}$ e invariante bajo $\widetilde{T}$. Entonces*

$$\sup\{||x - \widetilde{w}||_{\mathcal{U}} \mid \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} = \operatorname{diam} K \;\forall\, x \in K$$

Demostración. Sea $\widetilde{x_n}$ un afps de $\widetilde{T}$ en $\widetilde{W}$, por el lema de Lin

$$\operatorname{diam} K = \lim_n ||x - \widetilde{x_n}||_{\mathcal{U}} \leq \sup\{||x - \widetilde{w}||_{\mathcal{U}} \mid \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} \leq \operatorname{diam} K$$

□

Observación 3.2. *En particular, normalizando el conjunto K de modo que* $\operatorname{diam} K = 1$ *y* $0 \in K$, *entonces*

$$\sup_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}} \{||\widetilde{w}||_{\mathcal{U}}\} = 1$$

La estrategia entonces consistirá en construir un subconjunto $\widetilde{W} \subseteq \widetilde{K}$ no vacío, cerrado, convexo e invariante bajo $\widetilde{T}$ de forma que, bajo las propiedades del espacio, se excluya la posibilidad de elementos de $\widetilde{W}$ con norma arbitrariamente cercana a uno, lo cual sería una contradicción del resultado anterior y por lo tanto no existirían mapeos no expansivos sin puntos fijos. Los siguientes teoremas usan esta estrategia para su demostración.

Consideremos el siguiente coeficiente geométrico para los espacios de Banach y que aparece en [GF97].

Definición 3.2. *Dado un espacio de Banach X y un ultrafiltro no trivial $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$, definimos el coeficiente de García-Falset $R(X)$ por*

$$R(X) = \sup\{\lim_{\mathcal{U}} ||x + x_n|| \mid ||x|| \ , ||x_n|| \leq 1 \ \forall n \ \ y \ \ x_n \xrightarrow{w} 0\}$$

Equivalentemente $R(X)$ es el menor número tal que

$$\lim_{\mathcal{U}} ||x + x_n|| \leq R(X) \left(\max \{||x|| \, , \lim_{\mathcal{U}} ||x_n||\} \right)$$

Teorema 3.6 ([GF97])**.** *Sea X un espacio de Banach con $R(X) < 2$, entonces X satisface w-FPP.*

Demostración. Supongamos que X no cumple con w-FPP. Entonces existe un subconjunto w-compacto, convexo C con $\text{diam}(C) = 1$ y minimal invariante bajo algún mapeo no expansivo T. Sea (x_n) un afps y tomando una subsucesión podemos suponer que converge débilmente a 0. Consideramos el siguiente conjunto

$$W := \{w = (w_n) \in (C)_{\mathcal{U}} \mid ||(w_n) - (x_n)||_{\mathcal{U}} \leq 1/2 \ \text{ y } \ D[w_n] \leq 1/2\}$$

donde $D[w_n] = \lim_{\mathcal{U},m} \lim_{\mathcal{U},n} ||w_m - w_n||_{\mathcal{U}}$.

Notemos que W es cerrado, convexo y no vacío pues $(1/2)(x_n) \in W$. Además es $\widetilde{T}$-invariante: Sea $w \in W$, entonces $\lim_n \lim_m ||Tw_n - Tw_m|| \leq \lim_n \lim_m ||w_n - w_m|| \leq 1/2$ y $\lim_n ||Tw_n - x_n|| \leq \lim_n ||Tw_n - Tx_n|| + ||Tx_n - x_n|| \leq ||T|| \lim_n ||x_n - w_n|| \leq 1/2$.

Por (3.2)

$$\sup_{w \in W} ||w|| = 1$$

Sea $w \in W$ y sin pérdida de generalidad pongamos w_0 tal que $w\text{-}\lim_{\mathcal{U}} w_n = w_0$, entonces

$$\begin{aligned} ||w|| &= \lim_{\mathcal{U}} ||w_n|| \\ &= \lim_{\mathcal{U}} ||w_n - w_0 + w_0|| \\ &\leq R(X) \left(\max \{\lim_{\mathcal{U}} ||w_n - w_0|| \, , ||w_0||\} \right) \end{aligned}$$

Por la semicontinuidad de la norma:

$$||w|| \leq R(X) \left(\max \{\lim_{\mathcal{U},m} \lim_{\mathcal{U},n} ||w_m - w_n|| \, , ||w_n - x_n||\} \right)$$

Finalmente

$$||w|| \leq R(X) \times \left(\max \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \right) = R(x)/2 < 1$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 3.7. $c_0(\Gamma)$ *admite* w*-FPP.*

Demostración. Afirmamos que $R(c_0(\Gamma)) = 1$. Consideremos una sucesión débil-nula (x_n) en la bola unitaria y $x \in B_X$. Sea $\epsilon > 0$. Existe un conjunto finito $F \subset \Gamma$ tal que $|x(t)| < \epsilon$ siempre que $t \notin F$. Puesto que las funcionales de evaluación son continuas $x_n(t) \longrightarrow 0$ para todo $t \in \Gamma$, luego entonces $|x_n(t)| < \epsilon$ para todo $t \in F$ y n suficientemente grande. Así, $\liminf ||x_n + x|| \leq 1 + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $R(c_0(\Gamma)) = 1$.

□

Corolario 3.8. *Los espacios NUS tienen* w*-FPP*

Demostración. Sea X un espacio NUS, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda sucesión w-nula en la bola unitaria y toda $x \in B_X$, existe un entero positivo k tal que $||x + tx_k|| \leq 1 + \epsilon t$ siempre que $t \in (0, \delta)$. Entonces

$$||x + x_k|| \leq ||x + tx_k|| + (1 - t)\,||x_k|| \leq 2 + t(\epsilon - 1)$$

Y podemos escoger a k lo suficientemente grande de manera que el mismo argumento se puede aplicar con $y = x$ y $y_n = x_{k+n}$. Finalmente $R(X) < 2$. □

Observación 3.3. *De hecho, tenemos la siguiente caracterización sobre el coeficiente geométrico de García-Falset:*

Teorema 3.9 ([GF97])**.** *Sea* X *un espacio de Banach. Son equivalentes*

(I) X *satisface* $R(X) < 2$ *y es reflexivo*

(II) X *es WNUS.*

Finalizamos esta sección con una extensión del coeficiente de García-Falset y su respectivo resultado análogo al Teorema 3.6.

Definición 3.3. *Sea* X *un espacio de Banach. Para cualquier número no-negativo* t *y un ultrafiltro no trivial* $\mathcal{U}$ *sobre* $\mathbb{N}$*, definimos el coeficiente extendido de García-Falset como*

$$R(t, X) = \sup\{\lim_{\mathcal{U}} ||x + x_n|| \;|\; ||x|| \leq t\,, ||x_n|| \leq 1\,\forall n \;\; y \;\; x_n \xrightarrow{w} 0 \;\; con \; \lim_{\mathcal{U},m}\lim_{\mathcal{U},n\neq m} ||x_n - x_m|| \leq 1\}$$

Con un argumento similar a 3.6, salvo que el conjunto W que ahí aparece ahora lo ponemos como

$$W := \{w = (w_n) \in (C)_{\mathcal{U}} \;|\; ||(w_n) - (x_n)||_{\mathcal{U}} \leq 1 - a \;\text{ y }\; D[w_n] \leq a\}$$

donde $D[w_n] = \lim_{\mathcal{U},m}\lim_{\mathcal{U},n} ||w_m - w_n||_{\mathcal{U}}$ y $a = \frac{1}{1+t}$. Benavides en [DB96] prueba el siguiente:

Teorema 3.10 ([DB96])**.** *Sea* X *un espacio de Banach con* $R(t, X) < 1 + t$ *para alguna* $t > 0$*, entonces* X *satisface* w*-FPP.*

Como se menciona en [DB96], el Teorema 3.10 es una extensión estricta del Teorema 3.6.

Consideremos $X = \ell_2$ con la norma

$$|x| = \left|\left|x^+\right|\right| + \left|\left|x^-\right|\right|$$

donde x^+ y x^- denotan la parte positiva y negativa respectivamente, de x. Este espacio tiene NS y en la misma referencia se justifica que para espacios X con NS

$$\sup_{t \geq 0} \frac{1+t}{R(t, X)} > 1$$

Sin embargo, si consideramos al vector $x = e_1$ y la sucesión $x_n = -e_{n+1}$, es claro que $R(\ell_2, |\cdot|) = 2$.

Capítulo 4

Teoría de renormamiento

La teoría de renormamiento trata sobre la construcción de normas equivalentes con propiedades geométricas deseables, tales como convexidad o suavidad. Recordemos que un espacio $X_2 = (X, ||\cdot||_2)$ es un renormamiento de $X_1 = (X, ||\cdot||_1)$ si las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes, es decir, si existen constantes positivas c_1 y c_2 tal que

$$c_1 \, ||\cdot||_1 \leq ||\cdot||_2 \leq c_2 \, ||\cdot||_1$$

o equivalentemente si el mapeo identidad $Id : X_1 \longmapsto X_2$ es un isomorfismo entre X_1 y X_2.

En el contexto particular de la teoría del punto fijo, notemos que FPP no es preservada bajo isomorfismos: En [Lin08] se demuestra que ℓ_1 puede renormarse para satisfacer FPP, sin embargo con la norma usual ℓ_1 no cumple con FPP.

Una monografía excelente en la teoría de renormamiento es [DGZ93].

4.1. Resultados básicos en renormamiento

En esta primera sección enunciamos algunos resultados importantes sobre renormamiento.

Un primer resultado en esta dirección es que todo espacio con dual separable tiene una norma SC equivalente:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funcionales lineales acotadas que separa puntos de X, entonces la norma SC equivalente está dada por

$$|x| = ||x|| + \left(\sum_n 2^{-n} f_n^2(x) \right)^{1/2}$$

Damos una ligera generalización de este hecho, *transfiriendo* la propiedad de convexidad de un espacio a otro. Esta técnica será una constante en muchos de los resultados que aquí exponemos.

Teorema 4.1. *Un espacio de Banach X admite una norma SC si y sólo si existe un espacio de Banach Y SC y un operador inyectivo y continuo $T : X \longmapsto Y$*

Una interpretación geométrica sencilla de este hecho es que la suma de funciones convexas es estrictamente convexa siempre que al menos una de ellas lo sea.

Demostración. Si X admite un renormamiento SC, entonces X con tal norma y el operador identidad satisfacen las condiciones del Teorema.

Por otro lado, sea Y SC y $T : X \longmapsto Y$ un operador inyectivo y continuo. Para todo $x \in X$ definamos la norma

$$|x| = ||x|| + ||Tx||$$

Claramente $|\cdot|$ es equivalente a $||\cdot||$. Si x, y son linealmente independientes, puesto que T es inyectiva entonces Tx, Ty son linealmente independientes y entonces

$$\begin{aligned}
|x + y| &= ||x + y|| + ||Tx + Ty|| \\
&\leq ||x|| + ||y|| + ||Tx + Ty|| \\
&< ||x|| + ||y|| + ||Tx|| + ||Ty|| \\
&= |x| + |y|
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene porque Y es SC y entonces $(X, |\cdot|)$ es un espacio SC. □

Del mismo modo tenemos el siguiente

Teorema 4.2. *Sea X un espacio de Banach tal que para algún conjunto Γ existe un operador continuo lineal e inyectivo $T : X \longmapsto c_0(\Gamma)$. Entonces X admite un renormamiento SC.*

Bajo el mismo espíritu que el Teorema anterior, exponemos el siguiente resultado

Teorema 4.3. *Un espacio de Banach X admite una norma UG si existe un espacio Y con norma UG y un operador lineal acotado $T : Y \longmapsto D \subseteq X$ con D un subconjunto denso de X.*

Demostración. Demostraremos que el espacio dual X^* admite una norma W^*-UC y concluiremos usando el Teorema (1.22).

El operador adjunto $T^* : X^* \longmapsto Y^*$ es $w^* - w^*$-continua e inyectiva. Sea $|\cdot|^*$ la noma dual en X^* y $||\cdot||$, $||\cdot||^*$ la norma UG en Y y Y^* resp.

Definimos la nueva norma en X^* para $f \in X^*$ por

$$|||f|||^2 = |f|^{*2} + ||T^* f||^{*2}$$

Sean $(f_n), (g_n)$ dos sucesiones en X^* tales que (f_n) es acotada y

$$\lim_m (2|||f_n|||^2 + 2|||g_n|||^2 - |||f_n + g_n|||^2) = 0$$

Entonces

$$\lim_m (2|f_n|^{*2} + 2|g_n|^{*2} - |f_n + g_n|^{*2}) = 0$$

y

$$\lim_m (2\,||T^* f_n||^{*2} + 2\,||T^* g_n||^{*2} - ||T^*(f_n + g_n)||^{*2}) = 0$$

De las dos identidades anteriores y de la convexidad de la norma $||\cdot||^*$ en Y^*, tenemos que

$$\lim(|f_n| - |g_n|) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim T^*(f_n - g_n) = 0$$

Como la norma $||\cdot||^*$ es w^*-uniformemente continua (Teorema 1.22) entonces $\{f_n - g_n\}$ está acotada en X^* y $w^* - \lim_n T^*(f_n - g_n) = 0$ en la topología w^* de Y^*. Por lo tanto si $y \in Y$, entonces

$$\lim_n (f_n - g_n)(Ty) = w^* - \lim_n T^*(f_n - g_n) = 0$$

Puesto que TY es denso en X y como $\{f_n - g_n\}$ es acotado,

$$w^* - \lim_n (f_n - g_n) = 0$$

bajo la topología w^* de X^*. Esto muestra que $||| \cdot |||$ es W^*-UC. □

Recordemos que espacios (UCED) satisfacen w-FPP, combinando este hecho con el Teorema de Zizler (1.4) nos conduce a concluir:

Corolario 4.4. *Todo espacio de Banach separable puede ser renormado para tener w-FPP.*

Una de las principales preguntas en la Teoría del Punto Fijo es la equivalencia entre reflexividad y FPP. En general para el caso no-reflexivo no podemos esperar que existan renormamientos cumpliendo FPP, ver Teorema (4.11). De esta forma podemos restringirnos al caso reflexivo. El caso separable queda establecido por el corolario (4.4); el siguiente Teorema es un primer paso en la exploración del caso no-separable y muestra que los argumentos anteriores no son 'escalables'.

Teorema 4.5 ([KT82])**.** *Existen espacios reflexivos sin normas UCED equivalentes.*

No obstante el resultado negativo, espacios reflexivos no-separables pueden ser renormados para que cumplan con w-FPP.

El primer resultado en esta dirección contiene en su demostración la herramienta principal para el establecimiento de tales renormamientos, a saber la existencia de un operador lineal acotado e inyectivo

$$T : X \longmapsto c_0(\Gamma)$$

para algún conjunto Γ.

Un espacio X es *generado por un compacto débil* (WCG) si existe un w-compacto $K \subseteq X$ tal que $\overline{\text{span}}(K) = X$ y decimos que K genera a X.

Los siguientes son ejemplos de espacios generados por compactos débiles.

Ejemplo 4.1. *1. Todo espacio reflexivo es WCG, pues es generado por su bola unitaria, la cual es w-compacta.*

2. Todo espacio separable X es WCG, pues si $\{x_n\}$ es denso numerable en S_X, entonces $K = \{\frac{1}{n}x_n\} \cup \{0\}$ es un compacto que genera a X.

3. $c_0(\Gamma)$ es WCG, pues $\{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ el conjunto de los vectores unitarios canónicos es un w-compacto que genera a $c_0(\Gamma)$.

Los siguientes Teoremas nos darán una clase bastante amplia de espacios que pueden renormarse para satisfacer con la propiedad débil del punto fijo.

Teorema 4.6 ([AL68])**.** *Sea X un espacio WCG, entonces existe un operador lineal, acotado e inyectivo de X a $c_0(\Gamma)$ para algún conjunto Γ.*

Demostración. Afirmamos que existe una base de Markushevich $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ w-compacta. Sin pérdida de generalidad podemos poner $||f_\alpha|| \leq 1$ para todo $\alpha \in \Gamma$.

Definimos $T : X \longmapsto \ell_\infty(\Gamma) : x \longmapsto (f_\alpha(x))$. De esta forma $||T|| \leq 1$ y T mapea span $\{x_\alpha\}$ al conjunto de vectores con soporte finito en $\ell_\infty(\Gamma)$, pues recordemos que $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es un sistema biortogonal. En particular span $\{x_\alpha\}$ mapea a $c_0(\Gamma)$. Como T es continua y $c_0(\Gamma)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Gamma)$. $T(X) \subseteq c_0(\Gamma)$ y como $\{f_\alpha\}$ separa puntos, entonces concluimos que T es inyectiva.

Probaremos ahora la afirmación de que X admite una base de Markushevich w-compacta. La demostración de este hecho sigue inducción transfinita sobre el carácter de densidad dens(X). En lo siguiente K será un conjunto w-compacto convexo y simétrico que genera a X.

El caso base es cuando X es separable. Sea $\{z_n\}$ denso numerable en K. Por el Teorema (3) del apéndice, existe una base de Markushevich $\{x_n, f_n\}$ tal que span$\{x_n\} =$ span$\{z_n\}$. Escalando, podemos suponer que $x_n \in K$ para todo n. Afirmamos que $\{x_n\} \cup \{0\}$ es w-compacto.

Sea $\{x'_n\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Entonces $\lim_m \lim_n f_m(x'_n) = \lim_m \lim_n \delta_{nm} = 0$, por lo que por el Teorema de Eberlein-Smulyan podemos concluir que $\{x_n\} \cup \{0\}$ es w-compacto.

Supongamos que el Teorema se cumple para todo espacio WCG con carácter de densidad menor a μ. Consideremos $\{P_\alpha\}$ una PRI en X, la cual existe por el Teorema (4) del apéndice. Para todo $\alpha \in [\omega_0, \mu)$, $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(K)$ es w-cerrado y contenido en $2K$, por lo que es w-compacto. De modo que $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)$ es WCG. Por la hipótesis de inducción existe una base de Markushevich $\{x_\beta^\alpha, f_\beta^\alpha\}_{\beta \in I_\alpha}$ de $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)$ para todo $\alpha \in [\omega_0, \mu)$ con $\{x_\beta^\alpha\}_{\beta \in I_\alpha} \subseteq (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(K) \subseteq 2K$. Por el lema 5 del apéndice, $\{x_\beta^\alpha\}_{\beta \in I_\alpha}$ con $\alpha < \mu$ es linealmente denso en X.

Consideremos $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)^* : (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)^* \longmapsto X^*$, entonces $\{x_\beta^\alpha, (P_{\alpha+1} - P_\alpha)^*(f_\beta^\alpha)\}_{\beta \in I_\alpha}$ es un sistema biortogonal en $X \times X^*$. Ahora, si $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)^*(f_\beta^\alpha)x = 0$ para todo $\alpha < \mu$ y todo $\beta \in I_\alpha$; como $\{f_\beta^\alpha\}$ separa puntos, entonces $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)x = 0$ para todo $\alpha < \mu$ y usando el lema 5 del apéndice, obtenemos que $x = 0$. Así pues, la familia $\{(P_{\alpha+1} - P_\alpha)^*(f_\beta^\alpha)\}_{\beta \in I_\alpha}$ con $\alpha < \mu$ separa puntos.

Concluimos así que $\{x_\beta^\alpha; (P_{\alpha+1} - P_\alpha)^*(f_\beta^\alpha)\}_{\beta \in I_\alpha}$ es una base de Markushevich para $\alpha < \mu$ y entonces $\{x_\beta^\alpha/2; 2(P_{\alpha+1} - P_\alpha)^*(f_\beta^\alpha)\}_{\beta \in I_\alpha}$ es una base de Markushevich w-compacta con $\{x_\beta^\alpha/2\}_{\beta \in I_\alpha} \subset K$. □

Puesto que existe una inyección de los espacios WCG a c_0, entonces tales espacios pueden renormarse para satisfacer SC. Más aún, en [Tro71] se prueba que los espacios WCG admiten una norma LUC (y Gâteaux diferenciable). A su vez éste es una generalización del resultado fundamental de Kadec que todo espacio separable puede renormarse con una norma LUC.

Usando la misma inmersión sobre $c_0(\Gamma)$ en [DB09] se demuestra el siguiente Teorema, el cual nos acerca a establecer la relación entre reflexividad y w-FPP al menos de forma parcial.

Teorema 4.7 ([DB09]). *Sea X un espacio de Banach tal que para algún conjunto Γ, existe un operador lineal acotado $T : X \longmapsto c_0(\Gamma)$. Entonces X puede ser renormado para satisfacer w-FPP.*

Corolario 4.8. *Sea X un espacio reflexivo, entonces admite una norma equivalente con w-FPP*

Demostración. Del Teorema (4.6), existe un operador lineal acotado $T : X \longmapsto c_0(\Gamma)$ y finalmente por el Teorema (4.7), X puede ser renormado para satisfacer FPP.

Si la norma original es $||\cdot||$, entonces el renormamiento está dado por

$$|x|^2 = ||x||^2 + ||Tx||_0^2$$

donde $||\cdot||_0$ es la norma del supremo en $c_0(\Gamma)$ y T el operador del Teorema anterior[1]. □

[1] Es posible considerar la norma $|x|^2 = ||x||^2 + \lambda ||Tx||_0^2$ con λ arbitrariamente pequeño, por lo cual podemos aproximar la norma que satisface w-FPP a la original tanto como queramos.

4.2. Renormamiento en espacios clásicos

A continuación enunciaremos ciertos resultados sobre la imposibilidad de renormar a los espacios clásicos $(c_0, \ell_1, \ell_\infty)$ con normas que poseen 'buenas' propiedades geométricas. Tengamos en mente que nuestro último propósito es encontrar renormamientos que impliquen la propiedad del punto fijo.

Los ejemplos 2.2 y 2.3 muestran que tanto ℓ_1 como c_0 con las normas usuales no poseen FPP. ¿Será posible encontrar renormamientos que si cumplan con FPP?

Identificamos a $\ell_1(\Gamma)$ como el espacio dual de $c_0(\Gamma)$.

Comenzamos por revisar la imposibilidad de renormar-FPP a c_0.

Teorema 4.9. *Si Γ es no numerable, entonces $c_0(\Gamma)$ no admite ningún renormamiento UCED.*

Demostración. Supongamos que existe algún renormamiento UCED $|||\cdot|||$. sea

$$M = \sup\{|||x||| \ \mid \ x \in B_{c_0}\} > 0$$

donde B_{c_0} es la bola unitaria (cerrada) con la norma usual.

Consideremos $\{u_n\} \subseteq B_{c_0}$ tal que $|||u_n||| \longrightarrow M$.

La clave radica en encontrar un elemento $z \neq 0$; en donde el soporte de cada elemento de la sucesión u_n sea disjunto del de z. Esto es posible pues Γ es no numerable y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}(u_n)$ es numerable.

Llegamos a una contradicción al considerar

$$x_n = u_n + \frac{z}{2} \qquad \text{y} \qquad y_n = u_n - \frac{z}{2}$$

Pues para toda n (puesto que el soporte de z es disjunto del de u_n) se tiene que $||x_n||_\infty \leq 1$, $||y_n||_\infty \leq 1$ y $\left|\left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|\right|_\infty = ||u_n||_\infty \leq 1$ y entonces

$$|||x_n||| \leq M \qquad \text{y} \qquad |||y_n||| \leq M$$

Por construcción

$$\left|\left|\left|\frac{x_n + y_n}{2}\right|\right|\right| \longrightarrow M$$

pero $x_n - y_n = z \neq 0$, lo cual es una contradicción.

□

El resultado análogo para ℓ_∞ es:

Teorema 4.10. *Si Γ es no numerable, entonces $\ell_\infty(\Gamma)$ no admite renormamiento (SC).*

Demostración. Sea ℓ_0 el subespacio lineal cerrado de $\ell_\infty(\Gamma)$ que consiste de vectores con soporte numerable. Para algún $x \in S_{\ell_0}$ ponemos

$$F_x = \{y \in S_{\ell_0} \mid y|_{\mathrm{supp}(x)} = x|_{\mathrm{supp}(x)}\}$$

con supp(x) el soporte de x.

Sea $|||\cdot|||$ un renormamiento de ℓ_0 equivalente. Sin pérdida de generalidad supongamos que $||\cdot||_\infty \leq |||\cdot|||$ y consideremos los conjuntos $M_x = \sup\{|||y|||\ ;\ y \in F_x\}$ y $m_x = \inf\{|||y|||\ ;\ y \in F_x\}$. Afirmamos que $m_x + M_x \geq 2|||x|||$:

Sea $\epsilon > 0$ y $y \in F_x$ tal que $|||y||| \leq m_x + \epsilon$. Puesto que $2x - y \in F_x$ entonces $|||2x - y||| \leq M_x$. Entonces $2|||x||| \leq m_x + M_x + \epsilon$ y como $\epsilon > 0$ es arbitrario queda demostrada la afirmación.

Sea $x_1 \in S_{\ell_0}$ tal que

$$\frac{3\lambda + 1}{4} \leq |||x_1|||$$

donde $\lambda = \sup\{|||y||| \mid y \in S_{\ell_0}\}$. Entonces

$$\frac{\lambda + 1}{2} \leq m_{x_1}$$

y

$$M_{x_1} - m_{x_1} \leq \frac{\lambda - 1}{2}$$

Ahora, sea $x_2 \in F_{x_1}$ tal que

$$\frac{3M_{x_1} + |||x_1|||}{4} \leq |||x_2|||$$

y entonces

$$m_{x_2} \geq (M_{x_1} + |||x_1|||)/2 \qquad \text{y} \qquad M_{x_2} - m_{x_2} \leq \frac{\lambda - 1}{2^2}$$

De forma inductiva, así como se construyó x_2, tenemos una sucesión $x_{n+1} \in F_{x_n}$ donde $M_{x_n} - m_{x_n} \leq \frac{\lambda-1}{2^n}$. Las sucesiones (M_{x_n}) y (m_{x_n}) tienen un límite común μ. Notemos que para cualquier $y \in \cap_n F_{x_n}$, $|||y||| = \mu$.

Afirmamos que la esfera $\{x \in \ell_0\ ;\ |||x||| = \mu\}$ no es SC. Para probar esto, definimos $x \in \ell_0$ como

$$x(\gamma) = \begin{cases} x_n(\gamma) & \text{si } \gamma \in \mathrm{supp}(x_n) \\ 0 & \text{si } \gamma \notin \cup_n \mathrm{supp}(x_n) \end{cases}$$

Por construcción $F_x = \cap_n F_{x_n}$ y entonces $|||y||| = |||x||| = \mu$ para toda $y \in F_x$. Finalmente $F_x \subseteq \{x \in \ell_0\ ;\ |||x||| = \mu\}$ y F_x contiene segmentos de recta. $\square$

Veamos una definición, que nos dará una condición para verificar cuándo los espacios no tienen FPP.

Definición 4.1. *Un espacio de Banach X contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 si existe una sucesión nula $(\epsilon_n) \subseteq (0,1)$ y una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|$$

para todo $(t_n) \in \ell_1$.

Un espacio de Banach X contiene una copia asintóticamente isométrica de c_0 si existe una sucesión nula $(\epsilon_n) \subseteq (0,1)$ y una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que

$$\sup_n (1-\epsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sup_n |t_n|$$

para todo $(t_n) \in c_0$.

En 199 Dowling, Lennard y Turret [DLT96] explotaron el ejemplo de $\ell_1 = c^*$, el cual no cumple FPP, para demostrar lo siguiente.

Teorema 4.11 ([DLT96])**.** *Todo espacio de Banach conteniendo una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 (c_0) no cumple con FPP*

En el mismo artículo prueban que todos los subespacios no-reflexivos de $\mathbb{L}_1$ contienen una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1.

Este resultado combinado con el Teorema de Maurey (2.11), demuestra que un subespacio de $\mathbb{L}_1$ satisface FPP si y sólo si es reflexivo. No todos los espacios no-reflexivos pueden renormarse para tener la propiedad del punto fijo.

Bajo cualquier norma equivalente, ℓ_∞ o $\ell_1(\Gamma)$, donde Γ es no-numerable, admite una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 y toda norma equivalente de $c_0(\Gamma)$ admite una copia asintóticamente isométrica de c_0, [DLT96]. Luego entonces, ℓ_∞, $\ell_1(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$ no cumplen con FPP para cualquier renormamiento equivalente[2].

[2] A pesar de que admiten w-FPP, o renormamientos cuyas normas son lo suficientemente suaves como lo muestra el siguiente:

Teorema 4.12. *Para cualquier Γ; $c_0(\Gamma)$ admite una norma*

(I) *Fréchet diferenciable*

(II) *UG*

(III) *LUC*

Lo anterior llevó a la conjetura que todo espacio de Banach que cumple FPP es necesariamente reflexivo. Sin embargo en 1982, aparece el siguiente Teorema concerniente al renormamiento de $\mathbb{L}_1$.

Teorema 4.13 ([vD82]). $\mathbb{L}_1[0,1]$ *puede renormarse NS y entonces cumple w-FPP*

Esto sugiere que espacios no reflexivos pueden satisfacer la propiedad débil del punto fijo. En efecto, existen espacios no-reflexivos que no contienen copias asintóticamente isométricas de ℓ_1 o c_0. Para $(\gamma_k) \subseteq (0,1)$ una sucesión no-decreciente convergiendo a 1,

$$|||x||| = \sup_k \gamma_k \sum_{n=k}^{\infty} |x(n)|$$

es una norma equivalente de ℓ_1 y no admite copias asintóticamente isométricas de ℓ_1.

Tomando $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$, Lin en [Lin08] demuestra que $(\ell_1, |||\cdot|||)$ tiene FPP. Este fue el primer ejemplo de un espacio no-reflexivo con la propiedad del punto fijo. El resultado anterior también muestra que FPP no es preservado por isomorfismos. **Además nos lleva a pensar en FPP (o w-FPP) como una propiedad geométrica intrínseca de los espacios.**

Demostración.

(I) Por el Teorema (7.2, Capítulo II) en [DGZ93], sabemos que $c_0^*(\Gamma)$ admite una norma LUC, y por el lema (1.17) sabemos que $c_0(\Gamma)$ es Fréchet diferenciable.

(II) Sea $T : \ell_2(\Gamma) \longmapsto c_0(\Gamma)$ el mapeo identidad de $\ell_2(\Gamma)$ en $c_0(\Gamma)$. Luego $T(\ell_2(\Gamma))$ contiene todas las funciones en Γ con soporte finito y entonces es denso en $c_0(\Gamma)$. Concluimos usando el Teorema (4.3), pues la norma usual en $\ell_2(\Gamma)$ es UG.

(III) [Rai69]

□

O recordemos el resultado de Dowling, Lennard y Turret [DLT96], quienes demuestran que un conjunto cerrado y convexo de c_0 tiene FPP si y sólo si es w-compacto.

Capítulo 5

Genericidad

Después de haber revisado la pregunta concerniente a renormamiento, la siguiente pregunta natural es si todos los renormamientos satisfacen FPP o w-FPP. El fin último de la tesis es buscar propiedades geométricas que implican FPP (o su relación con dicha propiedad), muchas veces esta tarea es muy ambiciosa y un primer paso es establecer el resultado para una subclase 'grande' del espacio. De esta forma nos preguntamos ¿Cuántos renormamientos cumplen con FPP? Un enfoque para responder a esta pregunta es considerar todos los renormamientos y analizar qué tantos de estos satisfacen FPP. Genericidad se enfoca en responder a esto. Nos gustaría que *casi todos* los renormamientos preserven w-FPP o FPP. En este capítulo se pretende dar respuesta a éstas preguntas.

5.1. FPP y genericidad

En general diremos que una propiedad (P) es *genérica* en un conjunto A si todos los elementos de A satisfacen (P) salvo un 'conjunto pequeño', y diremos que A satisface (P) 'casi siempre'.

El primer paso es precisar a qué nos referimos por un 'conjunto pequeño'. Dependiendo del marco en el cuál estemos trabajando, habrán diversas nociones de conjunto nulo o prescindible. En un marco de cardinalidad un conjunto pequeño puede ser uno numerable, pero esta resulta ser una clase sin muchas propiedades; en un espacio de medida (X, Σ, μ), los conjuntos prescindibles serán los $\mu-$nulos o conjuntos de medida cero. Un problema con esta noción es la dificultad de extender la medida de Lebesgue a espacios de dimensión infinita.

Una noción más adecuada en nuestro estudio es la noción topológica de categoría:

Definición 5.1 (Conjunto Magro). *Decimos que $A \subseteq X$ subconjunto de un espacio topológico es magro (o de la primera categoría) si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, es decir, conjuntos cuya cerradura tiene interior vacío.*

Al complemento de un conjunto magro, es decir, la intersección numerable de conjuntos con interior denso, le llamaremos conjunto *residual*.

Observación 5.1. *Es importante resaltar que todas las nociones de conjunto 'pequeño' mencionadas arriba forman un σ-ideal, es decir, cerrados bajo uniones numerables y preservadas bajo inclusión.*

Trabajaremos en el marco del conjunto de todos los renormamientos de un espacio de Banach. En el capítulo anterior vimos que tanto ℓ_1 como $\mathbb{L}_1$ con las normas usuales no satisfacen FPP y sin embargo pueden renormarse para tener la propiedad del punto fijo, de modo que FPP no se preserva bajo isomorfismos. Motivados por los resultados, un tanto negativos, de [DLT96] (ℓ_∞, $\ell_1(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$ no cumplen con FPP para cualquier renormamiento equivalente); nos restringimos en principio a espacios reflexivos[1].

Al final de la sección anterior, vimos que espacios reflexivos pueden ser renormados para satisfacer FPP. La extensión de ese resultado en el contexto de genericidad es: ¿Cuántos renormamientos satisfacen FPP?. En [FZZ82] se da una respuesta en el caso separable: Se demuestra que casi todos los renormamientos de un espacio UCED, en el sentido de la categoría de Baire, son también UCED. Debido al resultado de Zizler [Ziz71], todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente que es uniformemente convexa en cada dirección. Puesto que esta propiedad geométrica implica FPP, obtenemos la siguiente conclusión: Si X es un espacio de Banach reflexivo separable, entonces casi todos los renormamientos de X satisfacen FPP.

Denotemos por $\mathcal{P}$ al espacio de todas las normas equivalentes sobre un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$. Dotamos a $\mathcal{P}$ con la métrica

$$\rho(p, q) = \sup\{|p(x) - q(x) \mid x \in B_X\}$$

de modo que $(\mathcal{P}, \rho)$ es un *espacio de Baire*, pues es un subconjunto abierto del espacio de todas las semi-normas continuas de $(X, ||\cdot||)$ con la misma métrica ρ. Este último espacio es un espacio métrico completo y por el *Teorema de la Categoría de Baire*, es un *espacio de Baire*. El primer resultado de genericidad en este marco es el siguiente

Teorema 5.1 ([FZZ82])**.** *Sea (X, r) un espacio UCED. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{R}$ (más aún un G_δ denso) de $\mathcal{P}$, tal que para todo $p \in \mathcal{R}$, el espacio (X, p) es UCED.*

Demostración. Para $p \in \mathcal{P}$ y $j \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{R}(p, j) = \left\{ q \in \mathcal{P}\ ;\ \sup\{|p^2(x) + \frac{1}{j} r^2(x) - q^2(x)|\ ,\ x \in B_{(X,r)}\} < \frac{1}{j^2} \right\}$$

Definimos

$$\mathcal{R}_k = \cup_{p \in \mathcal{P}, j \geq k} \mathcal{R}(p, j)$$

y

$$\mathcal{R} = \cap_k \mathcal{R}_k$$

[1] Recordemos que en espacios reflexivos w-FPP y FPP son equivalentes.

Es claro que $\mathcal{R}_k$ es abierto en $(\mathcal{P}, \rho)$. Afirmamos que $\mathcal{R}$ es un G_δ denso. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathcal{P}$, para cada $j \geq k$

$$(p^2 + \frac{1}{j} r^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{R}(p, j) \subset \mathcal{R}_k$$

Puesto que

$$\lim_j \rho((p^2 + \frac{1}{j} r^2)^{\frac{1}{2}}, p) = 0$$

entonces $p \in \mathcal{R}_k^-$ y entonces $\mathcal{R}_k$ es denso en $(\mathcal{P}, \rho)$. Por construcción $\mathcal{R}$ es un G_δ y su densidad se concluye del hecho de que $(\mathcal{P}, \rho)$ es un espacio de Baire.

Concluiremos la demostración una vez que probemos que $\mathcal{R}$ es una familia de normas UCED. Fijemos $q \in \mathcal{R}$ y sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones tales que para todo n, $r(x_n), r(y_n) \leq \frac{1}{2}$, $x_n - y_n = \alpha_n z$ para algún $z \in X$ y $\alpha_n \in \mathbb{R}$ y

$$\lim 2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n) = 0$$

Como $q \in \mathcal{R}_k$ para todo k, existe $j_k \geq k$ y $p_k \in \mathcal{P}$ tal que $q \in \mathcal{R}(p_k, j_k)$, es decir,

$$\sup\{|p_k^2(x) + \frac{1}{j_k} r^2(x) - q^2(x)| \,;\, x \in B_{(X,r)}\} < \frac{1}{j_k^2}$$

De la convexidad de p_k

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j_k}(2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) &\leq 2(p_k^2 + \frac{1}{j_k} r^2)(x_n) + 2(p_k^2 + \frac{1}{j_k} r^2)(y_n) \\
&\quad - (p_k^2 + \frac{1}{j_k} r^2)(x_n + y_n) \\
&\leq \frac{5}{j_k^2} + (2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n))
\end{aligned}$$

Finalmente, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_n \frac{1}{j_k}(2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) \leq \frac{5}{j_k} + \lim_n (2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n)) = \frac{5}{j_k^2}$$

Como k es arbitrario

$$\lim_n (2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) = 0$$

y por la convexidad uniforme en toda dirección de r, $\alpha_n \longrightarrow 0$, lo que demuestra que la norma q es UCED. $\square$

Si revisamos cuidadosamente la demostración de (5.1), podemos hacer la siguiente observación en forma de lema, el cual nos ayudará a extender el resultado. Pero antes recodemos la definición (1.6) de norma P-regular. Decimos que una norma r es P-regular si para dos sucesiones $\{x_n\},\{y_n\} \subseteq X$ tales que $r(x_n), r(y_n) \leq 1/2$ para todo n y

$$\lim 2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n) = 0$$

entonces $x_n - y_n \longrightarrow 0$ bajo alguna topología.

Lema 5.2. *Sea (X, r) un espacio P-regular y $q \in \mathcal{P}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $p_k \in \mathcal{P}$ y $j_k \geq k$ tales que*

$$\rho(q, (\frac{r^2}{j_k} + p_k^2)^{\frac{1}{2}}) < \mathcal{O}(\frac{1}{j_k})$$

entonces q es P-regular.

Demostración. Sean $\{x_n\},\{y_n\} \subseteq X$ sucesiones tales que $q(x_n), q(y_n) \leq 1/2$ y

$$\lim 2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n) = 0$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Existe $p_k \in \mathcal{P}$ y $j_k \geq k$ con $\rho(q, (\frac{r^2}{j_k} + p_k^2)^{\frac{1}{2}}) < \mathcal{O}(\frac{1}{j_k})$

Notemos que por la equivalencia de normas, podemos escalar las sucesiones de modo que $r(x_n), r(y_n) \leq 1/2$ para todo n. Por la convexidad de p_k

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j_k}(2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) &\leq 2(p_k^2 + \frac{1}{j_k}r^2)(x_n) + 2(p_k^2 + \frac{1}{j_k}r^2)(y_n) \\
&\quad - (p_k^2 + \frac{1}{j_k}r^2)(x_n + y_n) \\
&\leq \mathcal{O}(\frac{1}{j_k}) + (2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n))
\end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
&\limsup \frac{1}{j_k}(2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) \\
&\leq \mathcal{O}(\frac{1}{j_k}) + \limsup(2q^2(x_n) + 2q^2(y_n) - q^2(x_n + y_n)) \\
&= \mathcal{O}(\frac{1}{j_k})
\end{aligned}$$

como k es arbitrario podemos concluir que

$$\limsup \frac{1}{j_k}(2r^2(x_n) + 2r^2(y_n) - r^2(x_n + y_n)) = 0$$

Finalmente, por la P-regularidad de r concluimos que $x_n - y_n \longrightarrow 0$ bajo alguna topología y entonces q es P-regular.

□

Intuitivamente el lema nos dice que normas lo suficientemente cercanas a una norma P-regular, también es P-regular. Esto nos dice que las normas P-regulares son estables ante 'pequeñas' perturbaciones.

Con el lema anterior en mente, damos la extensión del Teorema (5.1) para distintas nociones de convexidad.

Teorema 5.3. *Sea (X, r) un espacio con propiedad geométrica P-regular. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$, tal que para todo $p \in \mathcal{R}$, el espacio (X, p) es P-regular.*

Si $(X^*, ||\cdot||^*)$ denota al espacio dual, $(\mathcal{P}^*, \rho^*)$ es el espacio de normas duales equivalentes con la métrica $\rho^*(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in B_{X^*}\}$. Así, tenemos que $(X, ||\cdot||)$ y $(X^*, ||\cdot||^*)$ son homeomorfos, considerando el mapeo $||\cdot|| \longmapsto ||\cdot||^*$. De modo que si trabajamos en el espacio $(\mathcal{P}^*, \rho^*)$, aplicamos el Teorema (5.3) y el homeomorfismo anterior, tenemos el siguiente:

Teorema 5.4. *Sea (X, r) un espacio cuya norma dual satisface P-regular. Entonces existe un subconjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$, tal que para todo $p \in \mathcal{R}$, el espacio (X^*, p^*) es P-regular.*

Observación 5.2. *En [FZZ82] demuestran este resultado con el propósito de dar una prueba 'categórica' de la técnica de ponderación de Asplund. Usando los teoremas (5.3 y 5.4) derivamos el siguiente*

Corolario 5.5. *Sea X un espacio de Banach con dos normas equivalentes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ con grado de convexidad P-regular en X y X^* respectivamente. Entonces X admite una norma equivalente $||\cdot||$ poseyendo un grado de convexidad P-regular y con el mismo grado de convexidad para la norma dual.*

Debemos resaltar que tanto la noción de medida como la de categoría sobre conjuntos 'pequeños' pueden ser diferentes en espacios donde las dos coexisten. Por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$ puede descomponerse como la unión disjunta de un conjunto de medida cero y otro de la primera categoría. Con el fin de evitar problemas de este tipo usamos el concepto de *porosidad*, pues como veremos extiende las nociones anteriores y resulta ser una clase más restrictiva que la de primera categoría o de medida cero.

Definición 5.2 (Porosidad)**.** *Dado un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$, un conjunto $M \subseteq X$ es* poroso *si para todo $x \in M$, existe $\Delta \in (0, 1)$ tal que para todo $r > 0$ existe $\widetilde{x} \in X$ tal que $||\widetilde{x} - x|| \leq r$ y $B(\widetilde{x}, \Delta\, ||\widetilde{x} - x||) \cap M = \emptyset$. A la unión numerable de conjuntos porosos, le llamamos σ-porosos.*

Observación 5.3. *Una condición suficiente para probar la porosidad de $M \subseteq X$ es que para todo $x \in M$ exista $\Delta > 0$ y $r_0 > 0$ tales que para todo $r \in (0, r_0]$, existe $\widetilde{x} \in X$ tal que*

$$B(\widetilde{x}, \Delta r) \subset B(x, r) \setminus M$$

La idea de porosidad de un conjunto $M \subseteq X$ concierne al tamaño de los hoyos que tiene M: cercano a todo punto $x \in M$, existen hoyos de tamaño 'muy grandes'.

Reconocemos que la definición de porosidad no es sencilla, con el fin de ilustrar cómo son los conjuntos porosos, daremos un par de ejemplos y establecemos propiedades sencillas de ésta clase de conjuntos.

Ejemplo 5.1. *(a) Sea X un espacio de Banach y pongamos a M como un conjunto que consiste únicamente de puntos aislados, es decir, para todo elemento $x \in M$ existe una vecindad que sólo contiene a x.*

Probaremos que todo punto $x \in M$ es poroso. Sea $x \in M$ y $0 < \epsilon < 1$ tal que $B(x, \epsilon) \cap M = \{x\}$. Afirmamos que $\Delta = r = \frac{1}{2}$, es testigo de la porosidad. Sea $r > 0$. Ponemos a $y \in X$ tal que $||x-y|| < \text{mín}(\frac{\epsilon}{2}, \frac{r}{2})$, entonces $B(y, \frac{||x-y||}{2})$ está enteramente contenida en $B(x, \epsilon)$ y además no contiene a x.

(b) Sea X un espacio finito-dimensional con $\dim X = n$, si $M \subseteq X$ tiene dimensión[2] *$\dim M = m < n$ entonces es poroso.*

Sin pérdida de generalidad podemos suponer[3] *que $0 \in M$. Probaremos que todo punto $x \in M$ es poroso. Sea $x \in M$, afirmamos que $\Delta = \frac{1}{2}$ es el testigo de la porosidad. Sea $r > 0$ y pongamos a $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal del espacio generado por M y la completamos a todo el espacio (de forma ortogonal) con $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Escojamos $y \in B(x, \frac{r}{2})$ tal que $\text{proy}_M^{\perp}(y) = x$: la proyección ortogonal de y sobre M es x. Entonces la bola $B(y, ||x-y||\,\Delta)$ no intersecta a M, más aún no intersecta a span$\{M\}$.*

Definición 5.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}$ y $x \in M$, para un $r > 0$ fijo, sea $\lambda^+(M, x, r)$ el supremo de las longitudes de los intervalos abiertos en $M^c \cap (x, x+r)$. La porosidad por la derecha de M en x está dado por*

$$p^+(M, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\lambda^+(M, x, r)}{r}$$

Similarmente se define la porosidad por la izquierda $p^-(M, x)$ donde ahora $\lambda^-(M, x, r)$ es el supremo de las longitudes de los intervalos abiertos en $M^c \cap (x-r, x)$.
La porosidad de M en x es

$$p(M, x) := \text{máx}(p^+(M, x), p^-(M, x))$$

El siguiente Teorema es una caracterización de porosidad en la recta $\mathbb{R}$.

[2]Nos referimos a la dimensión de un conjunto M como la dimensión del espacio afín que contiene a M

[3]Es fácil convencerse de que la traslación de un conjunto poroso es poroso.

Teorema 5.6. *Un conjunto $M \subset \mathbb{R}$ es poroso si y sólo si $p(M,x) > 0$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Supongamos que M es poroso en x, de modo que existe $\Delta > 0$ tal que para todo $r > 0$, existe $y \in \mathbb{R}$ con $|x-y| \leq r$ y $B(y, |x-y|\Delta) \cap M = \emptyset$. Esto último nos dice que para todo $r > 0$, $\lambda(M,x,r) := \text{máx}(\lambda^+(M,x,r), \lambda^-(M,x,r)) \geq |x-y|\Delta$ y entonces

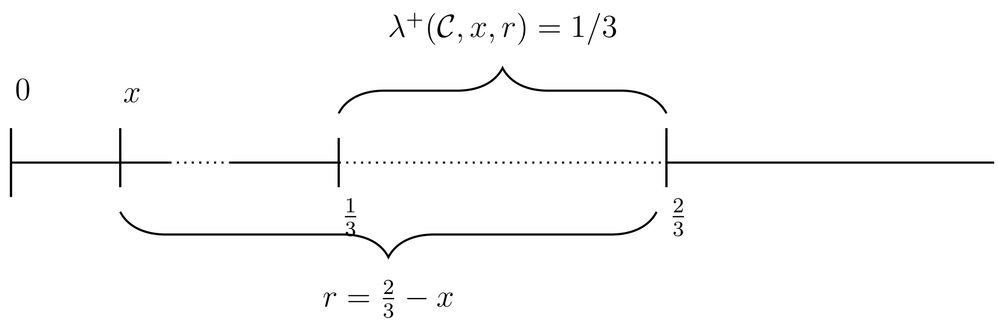
$$p(M,x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda(M,x,r)}{r} \geq \limsup_{r\to 0} \Delta > 0$$

Como x es arbitrario concluimos que $p(M,x) > 0$ para todo $x \in M$.

Ahora probaremos que todo punto $x \in M$ es poroso. $\Delta = \frac{1}{2}$ será el testigo de la porosidad. Sea $r > 0$. Sin pérdida de generalidad $p^+(M,x) = p(M,x)$, y éste último es positivo. Por lo tanto, $\lambda^+(M,x,r) > 0$, por lo que existe un intervalo I con longitud positiva que no intersecta a M. Podemos escoger $y \in I$ con $|x-y| \leq \frac{r}{2}$ y $B(y, |y-x|\Delta) = (y - \frac{r}{4}, y + \frac{r}{4}) \subset I$ y éste último no intersecta a M. $\square$

Con la caracterización anterior podemos probar lo siguiente.

Ejemplo 5.2. *El conjunto de cantor $\mathcal{C}$ es poroso.*



Debido a la auto-similitud del conjunto de Cantor, para todo $0 < r < \frac{2}{3^n}$, $\lambda^+(\mathcal{C},x,r) \geq \frac{1}{3^n}$ y entonces $p^+(\mathcal{C},x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Análogamente con la porosidad por la izquierda, de forma que $p(\mathcal{C},x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathcal{C}$ y entonces el conjunto de Cantor es poroso.

Es fácil ver que conjuntos porosos son densos en ninguna parte, y por tanto los conjuntos σ-porosos son de la primera categoría. Más aún, en espacios de dimensión finita (n), si M es poroso entonces $\lambda(M) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue.

Suponiendo $\lambda(M) > 0$, el *Teorema de Densidad de Lebesgue* arroja una $x \in M$ tal que

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\lambda(M \cap B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} = 1$$

Sea Δ el testigo de la porosidad de M en x. Pongamos $r > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que

$$\lambda(M \cap B(x,s)) > \left(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\right) \lambda(B(x,s)) \qquad \text{siempre que} \quad 0 < s < r$$

Sea $\widetilde{x} \in X$ tal que $||\widetilde{x} - x|| < \frac{r}{2}$ y $B(\widetilde{x}, \Delta\, ||\widetilde{x} - x||) \cap M = \emptyset$. Luego entonces,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\right) \lambda\left(B(x, 2\, ||\widetilde{x} - x||)\right) <& \lambda\left(M \cap B(x, 2\, ||\widetilde{x} - x||)\right) \\ \leq& \lambda\left(B(x, 2\, ||\widetilde{x} - x||) \setminus B(\widetilde{x}, \Delta\, ||\widetilde{x} - x||)\right) \\ =& \left(1 - \frac{\Delta^n}{2^n}\right) \lambda\left(B(x, 2\, ||\widetilde{x} - x||)\right) \end{aligned}$$

y llegamos a una contradicción. Por lo tanto $\lambda(M) = 0$.

Lo anterior nos indica que la clase de conjuntos porosos contiene a los de primera categoría y los conjuntos nulos (cuando es posible definir una medida de Lebesgue). En [Zaj76] se demuestra que existen conjuntos magros de medida cero y no-σ-porosos, lo que nos hace ver que es una clase más restrictiva que las anteriores.

Para una revisión más detallada sobre los conjuntos $\sigma-$porosos, referimos a [Zaj05] y las referencias dadas ahí.

Es posible reformular el Teorema (5.1) con la idea de porosidad.

Teorema 5.7. *Sea X un espacio de Banach P-regular, separable y reflexivo. Entonces existe un conjunto σ-poroso $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ tal que para todo $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$, (X,p) es P-regular.*

Demostración. Puesto que X es P-regular, existe una norma r P-regular. Para cualquier $p \in \mathcal{P}$, sea $m(p) = \operatorname{ínf}_{r(x)=1} p(x)$ y sea $p_j = \sqrt{p^2 + (r^2/j)}$. Para todo $x \in S_{(X,r)}$

$$|p_j(x) - p(x)| = \frac{|p_j^2(x) - p^2(x)|}{p_j(x) + p(x)} \leq \frac{r^2(x)}{jp(x)} \leq \frac{1}{jm(p)}$$

por lo que $\rho(p, p_j) \leq \frac{1}{jm(p)}$.

Denotemos

$$A_n = \left\{ p \in \mathcal{P} \mid \frac{1}{n} \leq m(p) \right\}$$

y

$$G_k = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bigcup_{j \geq k} B\left(p_j, \frac{1}{kj}\right)$$

Afirmamos que $A_n \setminus G_k$ es poroso con $r_0 = 1/k$ y $\Delta = \frac{1}{4kn}$.

Sea $s < 1/k$, de modo que $\frac{2n}{s} \geq \frac{1}{s} > k \geq 1$. Esto implica que existe un entero $j \geq k$ tal que $j \in (\frac{2n}{s}, \frac{4n}{s})$ y entonces $\frac{s}{4n} \leq \frac{1}{j} < \frac{s}{2n}$. Sea $p \in A_n \setminus G_k$. Si $q \in B(p_j, \frac{s}{4kn}) = B(p_j, s\Delta)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\rho(p,q) \leq & \rho(p,p_j) + \rho(p_j,q) \\
\leq & \frac{1}{jm(p)} + \frac{s}{4kn} \\
\leq & \frac{n}{j} + \frac{s}{4kn} \\
\leq & \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s
\end{aligned}
$$

Luego entonces $B(p_j, s\Delta) \subset B(p,s)$ y más aún como $B(p_j, \frac{1}{kj}) \in G_k$ y $\frac{s}{4kn} < \frac{1}{kj}$, la bola $B(p_j, s\Delta)$ no intersecta con $A_n \setminus G_k$ y así

$$\mathcal{R} = \cup_{n,k} A_n \setminus G_k$$

es σ-poroso.

Concluiremos la demostración del Teorema una vez que probemos que todo $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$ es P-regular. Sea entonces $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$ y notemos que

$$\mathcal{R} = \cup_{n,k} A_n \setminus G_k = \cup_k (\mathcal{P} \setminus G_k) = \mathcal{P} \setminus \cap_k G_k$$

y esto implica que $\mathcal{P} \setminus \mathcal{R} = \cap_k G_k$. De este modo $q \in \cap_k G_k$, de forma que existe $p = p(k) \in \mathcal{P}$ y $j \geq k$ tal que $q \in B(p_j, \frac{1}{kj})$. Dado que se cumplen las hipótesis del lema 5.2, podemos concluir que q es P-regular.

$\square$

Hacemos notar que estos argumentos no se extienden fácilmente a el caso no-separable (Teoremas 4.5 , 4.9). Recordemos, entonces, el coeficiente geométrico $R(X)$ de un espacio de Banach, definido como

$$R(X) := \sup\{\lim_{\mathcal{U}} ||x_n - x||\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las $x \in B_X$ y todas las sucesiones (x_n) débiles-nulas.

Es interesante preguntarse si w-FPP es una propiedad genérica en el espacio de normas equivalentes. La respuesta es afirmativa en el caso de espacios con $R(X) < 2$: En [DBP08] prueban que si un espacio de Banach X satisface que $R(X) < 2$, entonces, salvo en un conjunto σ-poroso, todos los renormamientos equivalentes ρ satisfacen $R(X;\rho) < 2$, por lo que cumplen con w-FPP.

Teorema 5.8 ([DBP08]). *Sea X un espacio de Banach tal que $R(X) < 2$. Entonces existe un conjunto σ-poroso $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ tal que para todo $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$, se tiene que $R(X;p) < 2$.*

En este trabajo extendemos el resultado anterior para espacios cuyo coeficiente extendido de García-Falset (3.3), satisface $R(t,X) < 1+t$ con algún $t > 0$. A continuación presentamos la modificación de dos lemas que aparecen en la prueba del Teorema anterior. Estos resultados nos hablan sobre la estabilidad, en el sentido que preservan la propiedad geométrica en cuestión, ante una perturbación de la norma.

Cuando no hay confusión respecto al espacio X sobre el cual estamos trabajando denotaremos al coeficiente $R(t,(X,q))$ como $R(t,q)$, con el fin de mantener la notación simple.

Lema 5.9. *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio de Banach y* $p \in \mathcal{P}$ *con*

$$m_t(p) = \inf_{x \in tB_{(X,||\cdot||)}} p(x) \qquad M_t(p) = \sup_{x \in tB_{(X,||\cdot||)}} p(x)$$

Sea $\lambda \in (0,1)$ *y* $p_\lambda(x) = p(x) + \lambda\, ||x||$. *Entonces*

$$R(t,p_\lambda) \leq (1+t) - \left[\frac{\lambda}{\frac{M_t(p)}{t} + \lambda}\right]((1+t) - R(t, ||\cdot||))$$

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión nula con $\lim_{m\neq n} p_\lambda(x_n - x_m) \leq 1$, $\lim_{m\neq n} ||x_n - x_m|| \leq 1$ (posible por la equivalencia de normas) y $x \in X$ tales que $p_\lambda(x_n) \leq 1$, $p_\lambda(x_n) \to 1$ y $p_\lambda(x) = t$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $||x_n|| \to a$ y $||x|| = b$; de este modo $p(x_n) \to 1 - \lambda a$ y $p(x) = t - \lambda b$.

Supongamos que $b - at \geq 0$. Notemos ahora que

$$\begin{aligned}\lim ||x_n + x|| \leq& \lim \left(\left|\left| a(\frac{x_n}{a} + \frac{tx}{b}) \right|\right| + \left|\left| x - \frac{at}{b}x \right|\right| \right)\\ \leq& aR(t, ||\cdot||) + b - at\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\lim p(x_n + x) + \lambda\, ||x_n + x|| \leq& \lim p(x_n) + p(x) + \lambda\, ||x_n + x||\\ \leq& 1 - \lambda a + t - \lambda b + \lambda(aR(t, ||\cdot||) + b - at)\\ =& (1+t) - \lambda a\, ((1+t) - R(t, ||\cdot||))\end{aligned} \tag{5.1}$$

Si en lugar, $b - at < 0$:

$$\begin{aligned}\lim ||x_n + x|| \leq& \lim \left(\left|\left| \frac{b}{t}(\frac{x_n}{a} + \frac{tx}{b}) \right|\right| + \left|\left| x_n - \frac{b}{at}x_n \right|\right| \right)\\ \leq& \frac{b}{t}R(t, ||\cdot||) + a - \frac{b}{t}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{lím}\, p(x_n + x) + \lambda \|x_n + x\| \leq & \,\text{lím}\, p(x_n) + p(x) + \lambda \|x_n + x\| \\ \leq & 1 - \lambda a + t - \lambda b + \lambda(\frac{b}{t} R(t, \|\cdot\|) + a - \frac{b}{t}) \\ = & (1+t) - \lambda \frac{b}{t} \left((1+t) - R(t, \|\cdot\|)\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como $p(y) \leq \frac{M_t(p)\|y\|}{t}$ para todo $y \in X$, entonces $p(y) + \lambda \|y\| \leq \left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right) \|y\|$ y luego

$$\|y\| \geq \frac{p_\lambda(y)}{\left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right)}$$

De esta forma tenemos que

$$\frac{1}{\left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right)} = \text{lím} \frac{p_\lambda(x_n)}{\left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right)} \leq \text{lím} \|x_n\| = a$$

y

$$\frac{1}{\left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right)} = \frac{p_\lambda(x)/t}{\left(\frac{M_t(p)}{t} + \lambda\right)} \leq \frac{\|x\|}{t} = \frac{b}{t}$$

De estas últimas desigualdades y (5.1, 5.2) obtenemos la desigualdad deseada.

□

Lema 5.10. *Sean $p, q \in \mathcal{P}$ tales que $\rho(p, q) < \epsilon$. Entonces*

$$R(t, q) \leq \frac{m_t(p) R(t, p) + \epsilon t(1+t)}{m_t(p) - \epsilon t}$$

Demostración. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión nula con $\text{lím}_{m \neq n}\, q(x_n - x_m) \leq 1$, $\text{lím}_{m \neq n}\, p(x_n - x_m) \leq 1$ y $x \in X$ tales que $q(x_n) \leq 1$, $q(x_n) \to 1$ y $q(x) = t$. Como $p(x) \leq q(x) + \epsilon \|x\|$ para todo $x \in X$; entonces $p(x) - \epsilon t \leq q(x)$ siempre que $\|x\| = t$. Entonces $\frac{p(x)}{q(x)} \leq \frac{p(x)}{p(x) - \epsilon t}$ y como la función $r \longmapsto \frac{r}{r - \epsilon t}$ es decreciente y $p(x) \geq m_t(p)$ para todo $\|x\| = t$:

$$p(x) \leq \frac{p(x)}{p(x) - \epsilon t} q(x) \leq \frac{m_t(p)}{m_t(p) - \epsilon t} q(x)$$

Esto implica que

$$p\left(\frac{m_t(p) - \epsilon t}{m_t(p)} y\right) \leq a \qquad \text{siempre que} \quad q(y) \leq a$$

Luego entonces,

$$p\left(\frac{m_t(p)-\epsilon t}{m_t(p)}x_n\right)\leq 1 \qquad p\left(\frac{m_t(p)-\epsilon t}{m_t(p)}x\right)\leq t$$

Más aún como

$$m_t(p)\leq p\left(\frac{tx}{||x||}\right) \quad \forall\, x\in X$$

entonces

$$||x||\leq \frac{p(x)t}{m_t(p)}$$

Así

$$\begin{aligned}
\operatorname{lím} q(x_n+x) &\leq \operatorname{lím} p(x_n+x)+\epsilon\,||x_n+x|| \\
&= \operatorname{lím}\left[\frac{m_t(p)}{m_t(p)-\epsilon t}\right] p\left(\frac{m_t(p)-\epsilon t}{m_t(p)}(x_n+x)\right)+\epsilon\,||x_n+x|| \\
&\leq \frac{m_t(p)}{m_t(p)-\epsilon t}R(t,p)+\epsilon t\frac{p(x_n+x)}{m_t(p)} \\
&\leq \frac{m_t(p)}{m_t(p)-\epsilon t}R(t,p)+\epsilon t\frac{q(x_n+x)}{m_t(p)-\epsilon t} \\
&\leq \frac{m_t(p)R(t,p)+\epsilon t(1+t)}{m_t(p)-\epsilon t}
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.11. *Sea $(X,||\cdot||)$ un espacio de Banach con $R(t,||\cdot||)<1+t$. Entonces existe un conjunto σ-poroso $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{P}$ tal que para toda norma $p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{R}$, entonces $R(t,p)<1+t$, y así (X,p) tiene w-FPP.*

Demostración. Sea

$$B_n=\{p\in\mathcal{P}\mid \frac{t}{n}<m_t(p)<M_t(p)<tn\}$$

y

$$A_n=B_n\setminus\bigcup_{\lambda\in(0,1),\,p\in\mathcal{P}}B\left(p_\lambda,\frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(n+2)}\lambda\right)$$

con $b=\frac{\log 2}{\log 1+t}+2$. La afirmación es que A_n es poroso. Para ello usaremos como testigos de la porosidad $\Delta=\frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{2(1+t)^b n(n+2)}$ y $r_0=1$.

Sea entonces $r\in(0,1)$ y $p\in\mathcal{P}$. Sea $\lambda=\frac{r}{2}$ y notemos que para todo $x\in B_X$,

$$|p(x)-p_{\frac{r}{2}}(x)|=\frac{r}{2}\,||x||\leq\frac{r}{2}$$

Luego $\rho(p,p_{\frac{r}{2}})\leq\frac{r}{2}$. Si $q\in B(p_{\frac{r}{2}},\Delta r)$, entonces

$$\rho(p,q)\leq\rho(p,p_{\frac{r}{2}})+\rho(p_{\frac{r}{2}},q)\leq\frac{r}{2}+\Delta r\leq\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

De modo que la bola $B(p_{\frac{r}{2}}, \Delta r)$ esta contenida en $B(p,r)$, además que no está contenida en A_n pues $B(p_{\frac{r}{2}}, \Delta r) = B\left(p_\lambda, \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(n+2)}\lambda\right)$. Deducimos entonces que $\mathcal{R} = \cup_n A_n$ es σ-poroso.

La demostración quedará concluida una vez que probemos que para todo $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$, $R(t,q) < 1+t$. Sea $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$. Notemos que $\mathcal{P} = \cup_n B_n$ y entonces para algún n

$$\frac{t}{n} < m_t(q) < M_t(q) < tn$$

Notemos que, como $q \in B_n$ y $q \notin A_n$ para todo n, entonces $q \in B\left(p_\lambda, \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(n+2)}\lambda\right)$ para algún $p \in \mathcal{P}$ y $\lambda \in (0,1)$, de otro modo $q \in A_n$. Así

$$\begin{aligned}
\rho(q,p_\lambda) \leq & \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(n+2)}\lambda \\
\leq & \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(\frac{M_t(q)}{t}+2)}\lambda \\
\leq & \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(\frac{M_t(p)}{t}+1)}\lambda \\
\leq & \frac{(1+t)-R(t,||\cdot||)}{(1+t)^b n(\frac{M_t(p)}{t}+\lambda)}\lambda \\
\overset{5,9}{\leq} & \frac{(1+t)-R(t,p_\lambda)}{(1+t)^b n} \\
\leq & \frac{[(1+t)-R(t,p_\lambda)]\left(\frac{m_t(p)}{t}+\lambda\right)}{(1+t)^b} := \epsilon
\end{aligned}$$

y por el lema (5.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}
R(t,q) \leq & \frac{m_t(p_\lambda)R(t,p_\lambda)+\epsilon t(1+t)}{m_t(p_\lambda)-\epsilon t} \\
= & \frac{m_t(p_\lambda)R(t,p_\lambda)+(1+t)\left\{\frac{[(1+t)-R(t,p_\lambda)](m_t(p)+\lambda t)}{(1+t)^b}\right\}}{m_t(p_\lambda)-\left\{\frac{[(1+t)-R(t,p_\lambda)](m_t(p)+\lambda t)}{(1+t)^b}\right\}}
\end{aligned}$$

y observando que $m_t(p)+\lambda t = m_t(p_\lambda)$

$$\begin{aligned}
R(t,q) \leq & \frac{(1+t)^b R(t,p_\lambda)m_t(p_\lambda)+(1+t)^2 m_t(p_\lambda)-(1+t)R(t,p_\lambda)m_t(p_\lambda)}{(1+t)^b m_t(p_\lambda)-(1+t)m_t(p_\lambda)+R(t,p_\lambda)m_t(p_\lambda)} \\
= & \frac{\left[(1+t)^b-(1+t)\right]R(t,p_\lambda)+(1+t)^2}{R(t,p_\lambda)+[(1+t)^b-(1+t)]}
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que $\frac{\left[(1+t)^b-(1+t)\right]R(t,p_\lambda)+(1+t)^2}{R(t,p_\lambda)+\left[(1+t)^b-(1+t)\right]} < 1+t$ siempre que $R(t,p_\lambda) < 1+t$; lo cual es cierto por el lema (5.9) y así $R(t,q) < 1+t$.

$\square$

Una de las herramientas principales para encontrar una norma equivalente satisfaciendo w-FPP es la existencia de una inmersión a $c_0(\Gamma)$ (esta propiedad la cumplen espacios muy generales, como lo son espacios con base de Markushevich, como los WCG, separables, etc.). El siguiente Teorema generaliza esta afirmación y de él podemos concluir que ***casi todos*** **los renormamientos de un espacio con base incondicional, reflexivos, etc. satisfacen w-FPP**, más no sabemos si la norma original cae en esta clase.

Teorema 5.12 ([DBP10])**.** *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un operador lineal acotado e inyectivo $J : X \longmapsto Y$ donde $R(Y) < 2$. Entonces existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ tal que para todo $p \in \mathcal{R}$, el espacio (X,p) satisface w-FPP.*

Generalizamos el resultado anterior para espacios inmersos en Y con $R(t,Y) < 1+t$ para algún $t > 0$.

Teorema 5.13. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un operador lineal acotado e inyectivo $J : X \longmapsto Y$ donde $R(t,Y) < 1+t$ para algún $t > 0$. Entonces existe un conjunto σ-poroso $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ tal que para toda norma $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$, entonces $R(t,(X,p)) < 1+t$, y así (X,p) tiene w-FPP.*

El teorema será un simple corolario de 5.11 y del siguiente lema, cuya demostración será totalmente análoga al resultado 5.9.

Lema 5.14. *Sea $(X, ||\cdot||_X)$ un espacio de Banach. Supongamos que existe un operador lineal acotado e inyectivo $J : X \longmapsto Y$ donde $R(t,Y) < 1+t$ para algún $t > 0$. Entonces existe un renormamiento p de X tal que $R(t',(X,p)) < 1+t'$ con $t' > 0$.*

Demostración. Notemos que una norma equivalente de X está dada por

$$p_\lambda(x) = ||x||_X + \lambda\, ||Jx||_Y$$

De forma completamente análoga al lema (5.9), es posible demostrar que $R(t',p_\lambda) < 1+t'$ para algún $t' > 0$. $\square$

Concluimos esta tesis con unas preguntas abiertas, dejándolas en la agenda de futura investigación.

(I) ¿Es FPP o w-FPP una propiedad genérica? Es decir, ¿si X satisface FPP o $w-$FPP entonces *casi todo* renormamiento satisface FPP o $w-$FPP?

Incluso si FPP resulta que no es una propiedad genérica, entonces ¿para qué clase de espacios si lo es? En este trabajo demostramos que para espacios reflexivos, w-FPP es una propiedad genérica.

Hemos visto que en espacios de dimensión finita es posible descomponer al espacio en dos conjuntos, uno pequeño en el sentido categórico y otro pequeño en el sentido de medida. El mismo fenómeno sucede en el contexto infinito-dimensional separable: Un resultado de [PT95] descompone al espacio en un conjunto σ-poroso y en otro Haar-Nulo, es decir, que existe una medida que asigna cero a toda traslación del conjunto. Esto justifica nuestra siguiente pregunta.

(II) ¿Es posible considerar como *conjunto pequeño* las nociones de conjunto **Haar-nulo**[4], **Haar-magro**[5], o conjuntos **HP-pequeños**[6]?

[4]Para su definición véase [Chr72; HSY92].
[5]Para su definición véase [Dar13].
[6]Para su definición y relación con conjuntos Haar-nulos y σ-porosos véase [Kol01].

Capítulo 6

Conclusiones

Uno de los problemas centrales en la Teoría del punto fijo (TPF), es caracterizar aquellos espacios que satisfacen con la propiedad del punto fijo (FPP). Aunque es un problema muy ambicioso, en este trabajo buscamos aportar a la caracterización de tales espacios. Un punto de partida para encontrar dicha caracterización es buscar cómo es la estructura de espacios que sabemos que satisfacen con dicha propiedad y cómo es la de aquellos que no. En ese espíritu en el Capítulo 1 establecemos diversas propiedades y estudiamos la relación entre ellas, así como sus similitudes.

El Capítulo 2 establece los resultados fundacionales en la TPF, así como resultados claves para entender la estructura de los espacios con FPP. El ejemplo de Alspach y el Teorema de Maurey nos hacen ver la complejidad del problema del punto fijo y junto con otros resultados nos sugieren buscar una relación entre reflexividad y FPP.

En el Capítulo 3 damos la construcción no-estándar del ultraproducto de un espacio de Banach y con base en esto desarrollamos una técnica útil para establecer la propiedad del punto fijo. Al final de tal capítulo revisamos el Coeficiente de García-Falset y la extensión que da [DB96] de dicho coeficiente geométrico y exponemos su relación con w-FPP.

Aprendimos que FPP depende no sólo del espacio subyacente sino también de la norma con la que se le dota, es decir, el comportamiento de los espacios con FPP depende tanto de la estructura lineal como de la estructura topológica del espacio. Es natural preguntarse por los posibles renormamientos que admiten los espacios y que en particular cumplen con FPP (o w-FPP). En el Capítulo 4 enunciamos resultados negativos en la Teoría de renormamiento, y más importante: establecemos la técnica principal para encontrar renormamientos con propiedades deseables como FPP. Esta técnica se basa, de algún modo u otro, en establecer una inyección entre el espacio en el que se está trabajando y c_0. Concluimos que espacios reflexivos pueden ser renormados para satisfacer FPP. En la segunda sección de este mismo capítulo aprendemos que FPP no implica reflexividad, además de que FPP no es preservado por isomorfismos. Esto nos conduce a pensar en FPP o w-FPP como una propiedad geométrica intrínseca de los espacios.

En el Capítulo 5 estudiamos la familia de todos los renormamientos equivalentes de un espacio que preservan FPP. Para medir el tamaño relativo de esta familia, usamos los conceptos de categoría de conjunto residual y de conjunto poroso. El resultado de [FZZ82] establece que *casi todos* (en el sentido de categoría) los renormamientos de un espacio UCED sigue siendo UCED. Extendemos el resultado anterior para incluir otras nociones de espacios con FPP y usamos la idea de porosidad para describir un conjunto pequeño.

Concerniente a la pregunta sobre si reflexividad implica FPP, En [DBP10] se arroja luz a la solución demostrando que espacios reflexivos admiten renormamiento con FPP, más aún que la familia de renormamientos con FPP es densa en $\mathcal{P}$-el espacio de normas equivalentes de X.

Generalizamos un resultado de Domínguez y Phothi [DBP08] sobre el tamaño de la clase de renormamientos que cumplen w-FPP para espacios con coeficiente de García-Falset $R(X) < 2$. Nuestro Teorema (5.11) usa el coeficiente extendido de García-Falset $R(t, X)$, el cual es una noción más general que $R(X)$, y probamos que casi todos los renormamientos de espacios con $R(t, X) < 1+t$ (los cuales incluyen a espacios con $R(X) < 2$) satisfacen w-FPP. Con este resultados somos capaces de establecer renormamientos que cumplen w-FPP para los espacios inmersos en espacios que cumplen $R(t, X) < 1 + t$ y más aún cuantificamos el tamaño de todos los renormamientos admitiendo w-FPP probando que tal clase es σ-porosa - Teorema (5.13).

En [DBP08] se usa como idea de conjunto pequeño a los conjuntos porosos. En vista de un resultado de [PT95] sobre la descomposición de un espacio infinito dimensional separable $X = A \cup B$ donde A es Haar-Nulo y B es σ-poroso, sugerimos usar el refinamiento de conjuntos HP de [Kol01] (los cuales son a la vez σ-porosos, Haar-Nulos y Haar-magros) como la noción de *conjunto pequeño*. Siguiendo las mismas técnicas que expusimos aquí, pensamos que es posible encontrar la generalización de nuestros Teoremas (5.11, 5.13) usando en lugar a los conjuntos HP como noción de una clase *pequeña*[1].

. $\square$

[1] Al momento de terminar de escribir esta tesis, nos encontramos trabajando en esta demostración.

Apéndice

Inclusión de espacios $\mathbb{L}_p$

Teorema 1 (Inclusión de espacios $\mathbb{L}_p$ (I))**.** *Sea (X, μ) un espacio de medida. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) $\mu(X) < \infty$

(b) Para cualquier $1 \leq p < q \leq \infty$

$$\mathbb{L}_q \subset \mathbb{L}_p$$

Demostración.

$[(a) \implies (b)]$ De la desigualdad de Hölder, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ con $r > 0$;

$$||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}} \, ||f||_q$$

$[(b) \implies (a)]$ Consideremos la inclusión $T : \mathbb{L}_q \hookrightarrow \mathbb{L}_p$. Dicha inclusión es continua: Puesto que convergencia en norma implica convergencia casi dondequiera, si $f_n \xrightarrow{q} f$ y $f_n \xrightarrow{p} g$ entonces $f = g$; por el Teorema de la Gráfica cerrada podemos concluir que dicha inclusión es continua.

Nuevamente por Hölder

$$||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}} \, ||f||_q$$

Entonces

$$||T|| \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}}$$

Más aún se tiene la igualdad poniendo $f = \chi_X(x)$.

Por lo que

$$\infty > ||T|| = \mu(X)^{\frac{1}{r}}$$

$\square$

El siguiente teorema es en parte dual al anterior. En particular aplica a los espacios ℓ_p.

Teorema 2 (Inclusión de espacios $\mathbb{L}_p$ (II))**.** *Sea (X, μ) un espacio de medida. Los siguientes enunciados son equivalentes*

(a) X no contiene conjuntos con medida arbitrariamente pequeña.

(b) Para cualquier $1 \leq p < q \leq \infty$

$$\mathbb{L}_p \subset \mathbb{L}_q$$

Demostración.

$[(a) \implies (b)]$ Supongamos que existe α tal que para todo subconjunto medible $Y \subseteq X$, se tiene $0 < \alpha \leq \mu(Y)$. Claramente el resultado es cierto para funciones características, para funciones simples el resultado se sigue de la inclusión de los espacios ℓ_p^n y el resultado en su totalidad es consecuencia de la densidad de las funciones simples en $\mathbb{L}_p$ y $\mathbb{L}_q$ y la inclusión en los espacios ℓ_p

$[(b) \implies (a)]$ Nuevamente la inclusión $T : \mathbb{L}_p \hookrightarrow \mathbb{L}_q$ es acotada. Definamos

$$g_Y(x) = \frac{\chi_Y(x)}{\mu(Y)^{\frac{1}{p}}}$$

para Y subconjunto medible.

Entonces

$$||g_Y||_q = \mu(Y)^{1/q-1/p}$$

y entonces

$$||T|| \geq \mu(Y)^{1/q-1/p}$$

o lo que es igual

$$0 < ||T||^{1/q-1/p} \leq \mu(Y)$$

Como el subconjunto medible Y es arbitrario concluimos la demostración.

□

Sistemas biortogonales

Un *sistema biortogonal* es una pareja indexada $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ de $E \times F$, con E y F una pareja dual tal que $\langle x_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el mapa de dualidad.

Definición 1 (Base de Markushevich)**.** *Sea X un espacio de Banach. Un sistema biortogonal $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ es una* base de Markushevich *de X si $\overline{\text{span}}\{x_i\} = X$ y $\{f_i\}$ separa puntos de X.*

Si además el conjunto $\{x_i\} \cup \{0\}$ es w-compacto, entonces diremos que la base es w-compacta.

Un ejemplo de una base de Markushevich son las bases de Schauder, pues por el Teorema de Hahn-Banach las funcionales normadoras separan puntos.

Teorema 3. *Sea X un espacio de Banach separable. Sea $\{z_i\} \subseteq X$ tal que $\overline{\text{span}}\{z_i\} = X$ y $\{g_i\} \subseteq X^*$ una familia que separa puntos. Entonces existe una base de Markushevich $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$; tal que* $\text{span}\{z_i\} = \text{span}\{x_i\}$ *y* $\text{span}\{f_i\} = \text{span}\{g_i\}$.

Demostración. Sea $x_1 = z_1$ y $f_1 = g_{k_1}/g_{k_1}(z_1)$, donde k_1 es el primer índice tal que $g_{k_1}(z_1) \neq 0$. Sea h_2 el primer entero tal que $g_{h_2} \notin \text{span}\{f_1\}$ y ponemos $f_2 = g_{h_2} - g_{h_2}(x_1)f_1$. Sea k_2 el siguiente índice tal que $f_2(z_{k_2}) \neq 0$ y $x_2 = (z_{k_2} - f_1(z_{k_2})x_1)/f_2(z_{k_2})$. Sea h_3 el menor entero tal que $z_{h_3} \notin \text{span}\{x_1, x_2\}$. Ponemos $x_3 = z_{h_3} - f_1(z_{h_3})x_1 - f_2(z_{h_3})x_2$ y $f_3 = (g_{k_3} - g_{k_3}(x_1)f_1 - g_{k_3}(x_2)f_2)/g_{k_3}(x_3)$, donde k_3 es el primer índice con $g_{k_3}(x_3) \neq 0$. Procedemos inductivamente, en el paso $2n$ construimos

$$f_{2n} = g_{h_{2n}} - \sum_{i=1}^{2n-1} g_{h_{2n}}(x_i)f_i \qquad x_{2n} = (z_{k_{2n}} - \sum_{i=1}^{2n-1} f_i(z_{k_{2n}})x_i)/f_{2n}(z_{k_{2n}})$$

mientras que en el paso $2n+1$

$$x_{2n+1} = z_{h_{2n+1}} - \sum_{i=1}^{2n} f_i(z_{h_{2n+1}})x_i \qquad f_{2n+1} = (g_{k_{2n+1}} - \sum_{i=1}^{2n} g_{k_{2n+1}}(x_i)f_i)/g_{k_{2n+1}}(x_{2n+1})$$

Claramente $\text{span}\{x_i\} \subseteq \text{span}\{z_i\}$ y $\text{span}\{f_i\} \subseteq \text{span}\{g_i\}$. Luego, con inducción $\text{span}\{z_i\}_{i=1}^n \subseteq \text{span}\{x_i\}_{i=1}^{2n}$ y $\text{span}\{g_i\}_{i=1}^n \subseteq \text{span}\{f_i\}_{i=1}^{2n}$. Finalmente (con inducción doble) $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. □

Resolución proyeccional de la identidad (PRI)

Recordemos que se denota a ω_0 como el primer ordinal infinito.

Definición 2. *Sea X un espacio de Banach. El* carácter de densidad *de X,* $\text{dens}(X)$*, es el menor cardinal de la forma* $\text{card}(A)$ *tal que A es un conjunto denso en X.*

Definición 3 (PRI)**.** *Sea X un espacio de Banach con carácter de densidad $\aleph$, sea μ el primer ordinal con cardinalidad $\aleph$. Una sucesión transfinita de proyecciones lineales acotadas $\{P_\alpha\}_{\omega_0\leq\alpha\leq\mu}$ sobre X son una resolución de la identidad (PRI) si*

(I) $P_{\omega_0} = 0$, $P_\mu = I_X$

y para todo $\omega_0 < \alpha, \beta \leq \mu$

(II) $||P_\alpha|| = 1$

(III) $\text{dens}(P_\alpha(X)) \leq \text{card}(\alpha)$

(IV) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_{\text{mín}(\alpha,\beta)}$ y

(V) para todo $x \in X$ las funciones $\phi : [\omega_0, \mu] \longmapsto X : \alpha \longmapsto P_\alpha(x)$ son continuas.

El resultado sobre existencia de PRIs que nos interesa en ésta tesis es el siguiente debido a Amir y Lindenstrauss [AL68].

Teorema 4. *Sea X un espacio de Banach generado por un conjunto K w-compacto, convexo y simétrico. Sea μ el primer ordinal con cardinalidad $\operatorname{dens}(X)$. Entonces existe un PRI $\{P_\alpha\}_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}$ tal que $P_\alpha(K) \subseteq K$ para todo $\alpha \in [\omega_0, \mu]$.*

El siguiente es un lema técnico usado para probar que para los espacios WCG existe un operador inyectivo que manda a c_0.

Lema 5. *Sea X un espacio de Banach con un PRI $(P_\alpha)_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}$. Entonces*

(a) Para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $\{\alpha \in [\omega_0, \mu) \mid \ ||P_{\alpha+1} - P_\alpha|| > \epsilon\}$ es finito y entonces el conjunto $\{\alpha \in [\omega_0, \mu) \mid ||P_{\alpha+1} - P_\alpha|| \neq 0\}$ es numerable.

(b) Para todo $x \in X$, $x = \sum_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu}(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(x)$, donde solamente un número numerable de sumandos son no-cero. En particular $X = \overline{\cup_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu} P_\alpha(X)}$.

Demostración.

(a) Supongamos que para alguna $x \in X$ y $\epsilon > 0$ el conjunto

$$A(x, \epsilon) = \{\alpha \in [\omega_0, \mu) \mid \ ||(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(x)|| > \epsilon\}$$

es infinito. Sea $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ una sucesión en $A(x, \epsilon)$ y $\alpha_\infty = \lim \alpha_i$. Como $P_\alpha(x) \to P_{\alpha_\infty}(x)$, la red $(P_\alpha(x))_{\omega_0 \leq \alpha < \alpha_\infty}$ es de Cauchy. Tenemos entonces que para algún $\alpha_0 < \alpha_\infty$, $||P_\alpha(x) - P_\beta(x)|| < \epsilon$ para todo $\alpha, \beta \in [\alpha_0, \alpha_\infty)$, lo cual es una contradicción.

(b) Se sigue del hecho de que si $\{\alpha \in [\omega_0, \mu) \mid \ ||P_{\alpha+1} - P_\alpha|| \neq 0\} = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, con la sucesión de α's creciente; entonces

$$\sum_{\omega_0 \leq \alpha \leq \mu} (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(x) = P_{\alpha_1}(x) + (P_{\alpha_1+1} - P_{\alpha_1})(x) + (P_{\alpha_2+1} - P_{\alpha_2})(x) + \cdots$$

y concluimos del inciso (v) de la definición de PRI.

$\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[AL68] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in banach spaces*, Annals of Mathematics **88** (1968), no. 1, 35–46.

[Als81] D. E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map*, Proceedings of the American Mathematical Society **82** (1981), no. 3, 423–424.

[Bes93] M. Besbes, *Extension des théorèmes de points fixes de maurey aux fonctions à valeurs vectorielles.*, Seminaire d'Initiation a l'Analyse. University of Paris VI (1993).

[Chr72] J.P.R Christensen, *On sets of haar measure zero in abelian polish groups*, Israel Journal of Mathematics **13** (1972), no. 3, 255–260.

[Cla36] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), no. 3, 396–414.

[Dar13] U. B. Darji, *On haar meager sets*, Topology and its Applications **160** (2013), no. 18, 2396 – 2400, Special Issue: Fourth Workshop on Coverings, Selections and Games in Topology.

[DB96] T. Domínguez Benavides, *A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results*, Houston J. Math (1996), 835–849.

[DB09] ———, *A renorming of some nonseparable banach spaces with the fixed point property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **350** (2009), no. 2, 525 – 530, The Interplay Between Measure Theory, Topology and Functional Analysis.

[DBP08] T. Domínguez Benavides and S. Phothi, *Porosity of the fixed point property under renorming*, Proceedings of the 8th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (2008), 1–13.

[DBP10] ———, *Genericity of the fixed point property under renorming in some classes of banach spaces.*, Fixed point theory and its applications (2010), 55–69.

[DGZ93] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smoothness and renormings in banach spaces*, Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, Longman Scientific & Technical, 1993.

[Die75] J. Diestel, *Geometry of banach spaces: selected topics*, Lecture notes in mathematics, Springer, 1975.

[DJS71] M. M. Day, R. C. James, and S. Swaminathan, *Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction*, Canad. J. Math. **23** (1971), 1051–1059.

[DL97] P. N. Dowling and C. J. Lennard, *Every nonreflexive subspace of $\mathbb{L}_1$ fails the fixed point property*, Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), no. 2, 443–446.

[DLT96] P.N. Dowling, C.J. Lennard, and B. Turett, *Reflexivity and the fixed-point property for nonexpansive maps*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **200** (1996), no. 3, 653 – 662.

[DS58] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators: General theory*, Pure and applied mathematics, Interscience Publishers, 1958.

[ELOS83] J. Elton, P-K. Lin, E. Odell, and S. Szarek, *Remarks on the fixed point problem for nonexpansive maps*, Fixed points and nonexpansive mappings (Cincinnati, Ohio, 1982), Contemp. Math., vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 87–120. MR 728595

[FHH+11] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach space theory: The basis for linear and nonlinear analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2011.

[FZZ82] M. Fabian, L. Zajíĉek, and V. Zizler, *On residuality of the set of rotund norms on a banach space*, Mathematische Annalen **258** (1982), no. 3, 349–351.

[GF97] J. García Falset, *The fixed point property in banach spaces with the nus-property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **215** (1997), no. 2, 532 – 542.

[GK90] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1990.

[Goe75] K. Goebel, *On the structure of minimal invariant sets for nonexpansive mappings*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **29** (1975), 73–77 (1977). MR 0461226

[Han56] O. Hanner, *On the uniform convexity of $\mathbb{L}_p$ and l_p*, Ark. Mat. **3** (1956), no. 3, 239–244.

[HSY92] B. R. Hunt, T. Sauer, and J. A. Yorke, *Prevalence: a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 217–238.

[JR07] M. Johanis and J. Rychtář, *On uniformly gâteaux smooth norms and normal structure*, Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), no. 5, 1511–1514.

[Kar76] L. A. Karlovitz, *Existence of fixed points of nonexpansive mappings in a space without normal structure.*, Pacific J. Math. **66** (1976), no. 1, 153–159.

[KL95] D. Kutzarova and T. Landes, *A reflexive space with normal structure that admits no uced norm*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics **25** (1995), no. 3, 1087–1091.

[Kol01] J. Kolář, *Porous sets that are haar null, and nowhere approximately differentiable functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** (2001), no. 5, 1403–1408.

[KT82] D.N. Kutzarova and S.L. Troyanski, *Reflexive banach spaces without equivalent norms which are uniformly convex or uniformly differentiable in every direction*, Studia Mathematica **72** (1982), no. 1, 91–95.

[Lin08] P-K. Lin, *There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **68** (2008), no. 8, 2303 – 2308.

[Mau81] B. Maurey, *Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L_1.*, Semin. Anal. Fonct. 1980-1981, Expose No.8, 18 p. (1981)., 1981.

[PT95] D. Preiss and J. Tišer, *Two unexpected examples concerning differentiability of lipschitz functions on banach spaces*, Geometric Aspects of Functional Analysis (Basel) (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Birkhäuser Basel, 1995, pp. 219–238.

[Rai69] J. Rainwater, *Local uniform convexity of day's norm on $c_0(\gamma)$*, Proceedings of the American Mathematical Society **22** (1969), no. 2, 335–339.

[Tro71] S. Troyanski, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable banach spaces*, Studia Mathematica **37** (1971), no. 2, 173–180 (eng).

[vD82] D. van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, Journal of the London Mathematical Society **s2-25** (1982), no. 1, 139–144.

[Zaj76] L. Zajíček, *Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity* (q), Časopis pro pěstování matematiky **101** (1976), no. 4, 350–359 (eng).

[Zaj05] ______, *On σ-porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2005** (2005), no. 5, 509–534.

[Ziz71] V. Zizler, *On some rotundity and smoothness properties of banach spaces*, Rozprawy matematyczne, Państwowe Wydawn. Naukowe, 1971.